石井 志保子 著

特異点入門

Springer

シュプリンガー・フェアラーク東京

はしがき

「数学を始めたばかりのころ特異点というものは私にとってすごく fancy なものだった」とベトナム人数学者の Lê Dung Tráng 氏は Trieste における講演で語った．それを聞いて，20 年以上特異点の研究の最先端で活躍している氏にとって，特異点との出会いが幸せなものであったことを知った．ひるがえって，特異点と筆者との出会いは幸せなものではなかった．

完備多様体のモジュライ問題を考えていた当時の筆者にとって，特異点とはただただ厄介ものであった．多様体の大局的な構造を知ろうとしても，ただ一つ特異点があることで情報がまったく得られないことがある．コホモロジーの双対性が崩れる．消えて欲しいコホモロジーが消えてくれない．射影多様体の安定性が崩れる．── 愚痴を言えば切りがないが，そんなことばかりも言っていられない．敵を知り己を知らば百戦危うからずと孫子先生も仰っている．特異点も，ひどく迷惑なものとそうでないものをはっきりさせてやれば，恐れる必要はなくなるだろう，ということで筆者は特異点と係わることになった．その係わりの中で特異点の魅力に触れることになった．次第に特異点が敵ではなく fancy なものになってきた．これと前後して M. Reid 氏が，ある種の優良特異点を許せば双有理幾何学において極小モデルが高次元でも存在するだろうという“極小モデル仮説”をたて，特異点が注目を浴びるようになってきた．やがて森重文，川又雄二郎，M. Reid, V. Shokurov, J. Kollár の各氏の寄与により，そして森氏により最終的に 3 次元極小モデル問題が解決されたことは記憶に新しい．この解決の重要なポイントの一つが極小モデルに許した優良特異点を分類することであった．そして優良でない特異点に関しては，極小モデルの存在

によって研究が飛躍的に進展することが期待されることとなった．ちょうど2次元最小特異点解消の存在が2次元特異点の研究に大きく貢献したように．

本書は2次元のこれまでの分類理論をふまえ，この10年間に進展した正則微分形式による特異点の分類を紹介することを目的としている．題名が特異点入門となっているが，広範囲にわたる特異点の話題をすべて網羅した入門書ではないことを予めおことわりしておきたい．読者としては，ある程度代数幾何学について知識があり，特異点を体系的に知りたい人を想定している．編集部からの依頼では，層の導入も書くべしということであったので層や多様体を手短に紹介した．しかし必要事項をすべてこの本で示すことはできなかったので，そのような事項についてはその都度参考文献をあげておいた．本書の構成は，第2章までで層，代数多様体，解析空間，コホモロジーに関する準備をし，特異点の議論は第3章から始めている．読者は第3章から読み始めることも可能であり，必要に応じて第1章，第2章を参照するという方法もあるだろう．第3章では特異点の概念を導入し，特異点解消の存在を紹介する．また非退化超曲面特異点の解消を具体的に構成する方法を見る．第4章では標準層の準備をし，添加公式を得る．第5章では分岐公式，対数的分岐公式を基礎として標準層による特異点の分類を紹介する．第6章では2次元特異点の理論を見るが，これまでの理論を標準層による特異点の分類論で見直してみる．第7章では高次元特異点，特に3次元特異点について考察する．第8章では特異点の変形理論を紹介する．変形によって特異点の諸性質がどう変わるかを表にまとめておいた．

本書の執筆中，石田正典氏(東北大)，臼井三平氏(阪大)，泊昌孝氏(金沢大)，福田拓生氏(東工大)，森重文氏(京大)，向井茂氏(名大)，渡辺敬一氏(日大)にご教示をいただいた．また藤沢太郎氏(長野高専)には原稿を細部にわたってチェックしていただき，ミスを修正することができた．上野健爾氏(京大)，渡辺公夫氏(筑波大)，奥間智弘氏(群馬高専)，松下大介氏(京大)，及び筑波大学の渡辺セミナーの皆さんには原稿を通して読んで貴重な助言をいただいた．この機会に各位に厚くお礼を申し上げる次第である．おわりに本シリーズへの執筆をお薦めいただいた上野健爾氏に心から謝意を表したい．

1997年9月　　著者

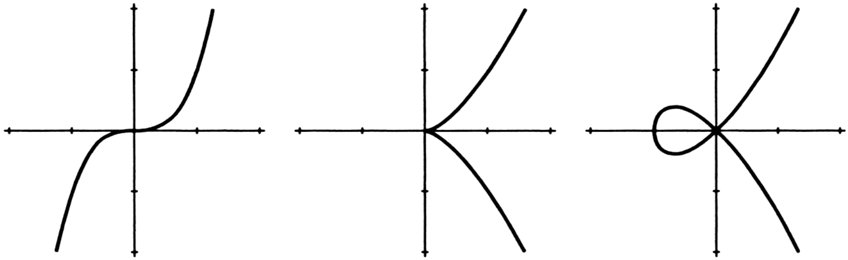
目　次

序　章　特異点とその作り方色々

すべての偉大な発見は
間違えをきっかけとしている
(Young [Mur, p.106])

特異点と聞けば何を思い浮かべるだろうか．例えば次のような方程式で定義される曲線の「特異点」を考えてみよう．

(1)　$y = x^3$,　　(2)　$y^2 = x^3$,　　(3)　$y^2 = x^3 + x^2$



(1) の「特異点」は何処だろうか．原点が変曲点だから「特異な」点といえるかも知れない．(2) ではどうだろうか．これは誰でも (変曲点の定義を知らない小学生でも) 原点が特異点だと答えるだろう．(3) も (2) と同様に誰でも原点が特異点だということに反対はしないだろう．(1) の原点の特異性に比べると (2) や (3) の原点の特異性ははるかにはっきりしている．我々はこの後者のようなものを特異点とよぶ立場をとる．それではこれらの特異点と他の点とはどこが違うのだろうか．それは他の点では十分小さい近傍にかぎって曲線を見てみると 1 本の直線と同じと見なせるが (2) (3) の原点ではどんなに小さな近傍をとっても (2) は尖りのある 1 本の曲線であり，(3) は 2 本の交差する直線であるので 1 本の直線と同じとは見なせないという事になる．1 本の直線と同じと見なせると

いう事を方程式を用いて表してみると次のようになる．曲線の方程式を移項により $f(x,y)=0$ と表す事にすると曲線上の点 (a,b) に於て偏微分 $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ が 0 でないとき，陰函数の定理より (a,b) の近傍でこの曲線上の点 (a',b') はその x 座標で $(a',h(a'))$ と表されること，即ち (a,b) の近傍でこの曲線は x 軸という直線と同じと見なせることが分かる．x と y をいれ変えても同様の事が示される．したがって $\mathrm{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)=1$ ならば (a,b) の近傍でこの曲線は直線と同じと見なせる訳である．この主張は逆も成立する．

実際 x,y 平面上の直線は $mx+ny=\ell$ $(m\neq 0$ または $n\neq 0)$ と表されるので $\mathrm{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)=\mathrm{rank}\,(m,n)=1.$

この同値性は変数の数をふやしてもまた変数が複素数を値にとることにしても成立するのである．すなわち n-変数複素正則関数の陰函数の定理により，n-次元複素空間 $\mathbb{C}^n$ の上で正則関数の方程式 $f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=,\cdots,=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ で定義される解集合 X の点 P での次元を r とすると次は同値になる：

(1)　P に於て $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(P)\\ \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(P)\end{pmatrix}=n-r;$

(2)　P の近傍で X は r-次元複素空間 $\mathbb{C}^r$ の開集合と同じと見なせる．

さて，P の近傍で X は r-次元複素空間 $\mathbb{C}^r$ の開集合と解析的に同型であるような点 P を非特異点または通常点とよぶことにしてそうでない点を特異点とよぶことにする．

さてこの特異点について，本書で考えたい問題を重複を恐れずに書き並べてみよう．

問 1.　**特異点にはどんなものがあるのか．**
もう少し限定して，特異点は，どんな風に作られるのか．

問 2.　**特異点の性質は種々の操作によってどう変わるのか．**

問 3.　どんな特異点が“たち”が良いのか.
特異点によっては，非特異点と同様の性質をもつものがある．このようなものを“たち”が良いということにする．“たち”の良いもの悪いものをはっきりさせよう.

問 4.　ある性質をもつ特異点を見つけるための計算方法を求める.
例えば“たち”の良い特異点を見分ける計算方法.

問 5.　各類が顕著な性質をもっているような簡潔な分類のしかたが特異点の世界にあるのだろうか.
さて，問 1 について，特異点全体を考えると，それこそ千差万別で，まとめようがないように思えるが，多くの場合，いくつかの典型的な構成方法に帰着させて調べることができる．そこで，典型的な作り方を見ることにしよう．切って作る，割って作る，持ち上げて作る，潰して作るという方法である．そしてそれぞれの場合に，問 2～問 5 がどのような形で出てくるか見てみよう.

0.1　切って作る　—— 超曲面特異点，特異点の超曲面切断 ——

解析空間 U 上の点 x を考えよう．$f(x) = 0$ となる正則関数 f をとり，$X = \{y \in U \mid f(y) = 0\}$ とすると X はまた点 x を含む解析空間である．このように，特異点 (U, x) から正則関数 f を用いて別の特異点 (X, x) を作ることを，“切って作る”といい，(X, x) を (U, x) の超曲面切断とよぶ.
特に U が $\mathbb{C}^n$ の開集合であるときに (X, x) を超曲面特異点とよぶ．では問 2 を考えてみよう.

問 2.　特異点 (X, x) の性質は特異点 (U, x) の性質とどう変わるのか.
また次のような問題も可能であろう.

問 2′.　$f = 0$ で定義される超曲面特異点は f の係数をパラメータとみて変化

させると，どんな特異点になるのだろうか．

これらの問題は 8 章で答えられる．

問 3.　超曲面特異点でどんなものが“たち”が良いのか．

2 次元では，$\mathbb{C}^3$ の中で次の方程式で定義される超曲面特異点が最も“たち”が良いものであることが示される (6.5).

A_n 型　$x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0, \quad (n \geq 1)$

D_n 型　$x^2 + y^2 z + z^{n-1} = 0, \quad (n \geq 4)$

E_6 型　$x^2 + y^3 + z^4 = 0$

E_7 型　$x^2 + y^3 + yz^3 = 0$

E_8 型　$x^2 + y^3 + z^5 = 0$

これらは Du Val 特異点とよばれる．

問 4.　超曲面特異点の中で Du Val 特異点をみつける計算方法はあるのか．

これは，6.3, 6.5 で得られる．

問 5.　超曲面特異点の分類はどのようになるのだろうか．

5 章で紹介する分類に従えば，超曲面特異点は 3 つの類に分類される (5.3.8).

0.2　割って作る　—— 商特異点, 特異点の商 ——

解析空間 X の自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ を考えよう．

この $\mathrm{Aut}(X)$ の有限部分群 G に対して，X/G を次の同値関係 $\approx$ による剰余類集合とする．

$$x \approx y \iff y = \sigma x, \quad {}^{\exists}\sigma \in G$$

すると X/G には自然に解析空間の構造が入る．

このように X から群 G によって X/G を作ることを G で割って作るといい，X/G を X の G による商空間という．特に X が $\mathbb{C}^n$ の開集合のとき，X/G に現れる特異点を商特異点とよぶ．

問 2. X/G に現れる特異点の性質は X 上の特異点の性質とどう変わるのか.
これについては, 5.2.9 参照.

問 2′. 商特異点を変形させるとその性質はどう変わるのか.
これは 8 章で答えられる.

問 3. 商特異点の中でどんなものが "たち" が良いのか. 実は商特異点はすべて, かなり "たち" の良いものであることが示される (6.4.9, 6.4.10).

問 4. 商特異点を見わける計算方法はあるのか.
2 次元の場合一目瞭然の見分け方がある (6.4.19).

問 5. 商特異点の分類はどのようになるのだろうか.
実は商特異点はすべて 5 章で紹介する分類では最も非特異に近い類に入ってしまうのである (6.4.9, 5.3.12).

0.3 持ち上げて作る —— 被覆特異点 ——

0.2 の逆の操作を「持ち上げる」とよぶことにする.
つまり解析空間 Y が与えられたときに X と有限群 G をうまく作り, $G \subset \mathrm{Aut}(x)$, $Y = X/G$ となるようにすることである.
実は X の特異点の性質は, Y の特異点の性質と, それほど変わらない (5.2.9).
それでいてうまくすれば扱い易いものになっていることがあるので, Y の特異点を調べるために X の特異点を調べるということをしばしばする. $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点の標準被覆がそうである (5.2.2).

0.4 潰して作る

解析空間 Y とその上の部分多様体 E に対して射 $f: Y \to X$ で制限射 $f|_{Y \setminus E}: Y \setminus E \to X \setminus f(E)$ が同型写像になるものを考えよう．$f(E)$ の次元が E の次元より小さくなっているとき，X を「Y の中で E を潰してできる解析空間」とよぶ．

問 2.　E の性質は X 上の特異点の性質にどのように反映するのであろうか．
これについては色々なところで見られるがたとえば，7.1.13, 7.1.14 参照．

問 3, 4.　“たち” の良い特異点を E の性質から判定できるのだろうか．
2 次元の場合これがかなりうまくいっている (6.3, 6.5).

問 5. 特異点の分類が E の分類と関係しているのだろうか．
特に E が既約で被約の場合 E の小平次元による分類と E を一点につぶしてできる特異点の 5 章で紹介する分類が対応している (5.3.13).

この序論でおわかりの通り本書はすべての問題に完全な解答を与えるものではなく，意欲ある読者に未解決の問題への足がかりを提供しようとするものである．読者が本書を踏み台として，特異点の様々な新たな課題にとりくみ，成果をあげられることを期待したい．

第 1 章　層と代数多様体，解析空間

努力と結果は比例することもある．

この章では層の概念を導入し，我々の研究対象である代数多様体，解析空間を手短かに紹介する．これらの概念をご存じの読者にはこの章はとばして読まれることを推める．

1.1　圏に関する準備

まず我々はどのような "世界" で議論をしようとしているのかをはっきりさせる必要がある．その "世界" が圏である．圏の定義から始めよう．

定義 1.1.1　$\mathcal{C}$ が**圏** (category) であるとは $\mathcal{C}$ の**対象** (object) とよばれるものの集まり $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ があって，任意の 2 つの対象 $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対し**射** (morphism) の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ が定まって次をみたしているときをいう：

(1)　$A \neq A'$ または $B \neq B'$ のとき $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B') = \phi$

(2)　$A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対し射の結合を決める写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (u, v) & \longmapsto & v \circ u \end{array}$$

が存在し，次が成立している．

(2.a)　各対象 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対し**恒等射** (identity morphism) とよばれるある射 $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ が存在し，$u \circ 1_A = u$, $1_A \circ v = v$ が任意の $u \in$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)$ について成立する．

(2.b)　任意の $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$, $w \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$ に対し結合法則 $w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$ が成立する．

以後簡単のため $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を $A \in \mathcal{C}$, $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ を $u : A \to B$ などと表したりする．

例 1.1.2　次の例はすべて圏である．

$\mathcal{C} = (\mathrm{Sets})$:　対象はすべての集合とする．$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) := \{u \mid u : A \to B$ 写像$\}$ とする．

$\mathcal{C} = (\mathrm{Ab})$:　対象はすべてのアーベル群とする．$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) = \{u \mid u : A \to B$ 群準同型$\}$ とする．

$\mathcal{C} = (\mathrm{Rings})$:　対象はすべての可換環とする．$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) = \{u \mid u : A \to B$ 環準同型$\}$ とする．

$\mathcal{C} = (\mathrm{Mod}_R)$:　ある可換環 R を固定し R 上のすべての加群を対象とする．$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) = \{u \mid u : A \to B$ R-加群の準同型$\}$ とする．

$\mathcal{C} = (\mathrm{Top})$:　対象はすべての位相空間とする．$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) = \{u \mid u : A \to B$ 連続写像$\}$ とする．

$\mathcal{C} = (\mathrm{Ouv}_X)$:　ある位相空間 X を固定し，X 上のすべての開集合を対象とする．$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ は $A \subset B$ のとき $\{u : A \to B$ 包含写像$\}$ とし $A \not\subset B$ のときは空集合とする．

ここで射の合成はすべて各々の写像の合成で定義する．また恒等射は恒等写像で定義する．

定義 1.1.3　圏 $\mathcal{C}$ の**双対圏** (dual category) $\mathcal{C}^0$ とは次のような圏である．

(1)　$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^0) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

(2)　任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対し

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(A,B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$$

(3)　任意の $A, B, C \in \mathcal{C}$, $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(A,B)$, $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(B,C)$ に対し，$\mathcal{C}^0$

における $v \circ u$ を $\mathcal{C}$ における $u \circ v$ で定義する.

一般に集合の間の写像に対して単射や全射の概念があるが，これをどの“世界”にも共通な言葉に翻訳しよう.

定義 1.1.4　圏 $\mathcal{C}$ において射 $u : A \to B$ が**単射** (monomorphism) であるとは，2 つの射 $v_1, v_2 : C \to A$ が $u \circ v_1 = u \circ v_2$ をみたすならば $v_1 = v_2$ となることである．このとき (A, u) を B の**部分対象** (subobject) という.

また $u : A \to B$ が**全射** (epimorphism) であるとは，2 つの射 $w_1, w_2 : B \to C$ が $w_1 \circ u = w_2 \circ u$ をみたすならば $w_1 = w_2$ となることである．このとき (u, B) を A の**商対象** (quotient object) という．$u : A \to B$ が単射でしかも全射であるとき**全単射** (bijection) とよぶ.

これらの単射，全射は $\mathcal{C} =$ (Sets), (Ab), (Rings), (Mod$_R$) の場合によく知られた単射，全射の概念と一致していることは明らかであろう.

定義 1.1.5　$u : A \to B$ に対し $v : B \to A$ が $u \circ v = 1_B, v \circ u = 1_A$ をみたすとき v は u の**逆射** (inverse morphism) であるといい u^{-1} と表す．(逆射は一意的である．) 逆射をもつ射 $u : A \to B$ を**同型射** または**同型** (isomorphism) とよぶ．またこのとき A は B に**同型** (isomorphic) という.

1.1.6　同型は全単射である．しかし逆は必ずしも正しくない．たとえば，$\mathcal{C} =$ (Top) においては次のような例がある．X を任意の自明でない位相空間とし，Y を X に自明な位相 (つまり開集合は ϕ と全体のみ) を入れた位相空間とする．このとき恒等写像 $id_X : X \to Y$ は連続写像になり，全単射である．しかし，逆射は存在しない.

例 1.1.2 の他の例 (Sets), (Ab), (Rings), (Mod$_R$), (Ouv$_X$) ではすべて全単射は，同型となっている.

定義 1.1.7　2 つの単射 $u : B \to A$, $u' : B' \to A$ に対して，$v : B \to B'$,

$v' : B' \to B$ が存在して，$u = u' \circ v$, $u' = u \circ v'$ が成立しているとき u と u' は**同値** (equivalent) であるといい，$u \sim u'$ と表す．($\sim$ は同値関係になる) 2つの全射 $v : A \to C$, $v' : A \to C'$ に対しても同様に同値性が定義される．

定義 1.1.8　$A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ に対して，次の性質 $(DP1), (DP2)$ をみたす (A, p_1, p_2) を A_1 と A_2 の**直積** (direct product) とよび $A_1 \times A_2$ で表す．

$(DP1)$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ p_1\ } & A_1 \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \\ A_2 & & \end{array}$$

なる射が存在

$(DP2)$　任意の射

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\ q_1\ } & A_1 \\ {\scriptstyle q_2}\downarrow & & \\ A_2 & & \end{array}$$

に対し，次の図式を可換にするような射 $\varphi : B \to A$ が一意的に存在する．

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\ q_1\ } & A_1 \\ {\scriptstyle q_2}\downarrow & \overset{\varphi}{\searrow} & \uparrow{\scriptstyle p_1} \\ A_2 & \xleftarrow[\ p_2\ ]{} & A \end{array}$$

この φ を (q_1, q_2) と表す．

$A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ に対して，$u_i : A_i \to A$ $(i = 1, 2)$ として (A, u_1, u_2) が A_1 と A_2 の**直和** (direct sum) であるとは (A, u_1, u_2) が $\mathcal{C}^0$ に於て A_1 と A_2 の直積になるときをいう．直和は，$A \oplus B$ と表す．

$(DP2)$ により直積，直和は，もし存在したとすれば，同型を除き一意的である．

定義 1.1.9　圏 $\mathcal{C}$ が次の条件をみたすときに**加法的圏** (additive category) であるという：

(1)　任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ がアーベル群になり $(v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u$, $v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2$ がみたされる．

(2)　任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対し直積 $A \times B$, 直和 $A \oplus B$ が存在する．

(3)　ある対象 $A \in \mathcal{C}$ が存在して $1_A = 0$. このような対象を**零対象** (null object) とよび，0 で表す．(零対象は同型を除いて一意的に定まる．)

定義 1.1.10　加法的圏 $\mathcal{C}$ における射 $u : A \to B$ に対し (A', i) が u の**核** (kernel) であるとは次の条件をみたすときにいう：

(1)　$i : A' \to A$ は単射

(2)　$u \circ i = 0$

(3)　$u \circ v = 0$ なる任意の $v : C \to A$ に対し，$v' : C \to A'$ が存在して $v = i \circ v'$ が成立する．(i の単射性よりこの v' は一意的．)

このとき (A', i) または A' を $\operatorname{Ker} u$ と表す．

また (p, B') が u の**余核** (cokernel) であるとは (B', p) が $\mathcal{C}^0$ において u の核になっているときにいう．このとき (p, B') または B' を $\operatorname{Coker} u$ と表す．

また $\operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} u)$ を $\operatorname{Im} u$ と表し u の**像** (image) とよぶ．また $\operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} u)$ を $\operatorname{Coim} u$ と表し，u の**余像** (coimage) とよぶ．

定義より $\operatorname{Ker} u$ は A の部分対象，$\operatorname{Coker} u$ は B の商対象，$\operatorname{Im} u$ は B の部分対象，Coim は A の商対象になる．これらは存在すれば同値を除いて一意的である．

命題 1.1.11　加法的圏 $\mathcal{C}$ の射 $u : A \to B$ に対し像 $(\operatorname{Im} u, i)$, および余像 $(p, \operatorname{Coim} u)$ が存在するとする．このとき $u = i \circ \overline{u} \circ p$ となるような $\overline{u} : \operatorname{Coim} u \to \operatorname{Im} u$ が一意的に存在する．

[証明]　核 $(\operatorname{Ker} u, j)$ の定義より $u \circ j = 0$. よって $\operatorname{Coim} u = \operatorname{Coker} j$ の定義より $u' : \operatorname{Coim} u \to B$ が一意的に存在して，$u = u' \circ p$. 余核 $(\operatorname{Coker} u, q)$ の定義より $q \circ u = q \circ u' \circ p = 0$ であるが p は全射であるので，$q \circ u' = 0$. ここで $\operatorname{Im} u$ の定義より $\overline{u} : \operatorname{Coim} u \to \operatorname{Im} u$ が一意的に存在して $u' = i \circ \overline{u}$.

定義 1.1.12　圏 $\mathcal{C}$ が次の条件をみたすときに**アーベル圏** (Abelian category) という．

(1)　$\mathcal{C}$ は加法的圏である．

(2)　任意の射 $u : A \to B$ に対して $\mathrm{Ker}\, u$, $\mathrm{Coker}\, u$ は存在する．

(3)　任意の射 $u : A \to B$ に対し 1.1.11 の $\overline{u} : \mathrm{Coim}\, u \to \mathrm{Im}\, u$ が同型になる．

例 1.1.13　(Ab), (Rings), (Mod_R) は加法的圏である．(Ab) (Mod_R) においては，射 $u : A \to B$ に対しすでに知られている $\mathrm{Ker}\, u = \{x \in A \mid u(x) = 0\}$, $\mathrm{Coker}\, u = B/u(A)$ が圏における $\mathrm{Ker}\, u$, $\mathrm{Coker}\, u$ になる．この 2 つはともにアーベル圏になる．

定義 1.1.14　アーベル圏 $\mathcal{C}$ において射の列

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

が**完全** (exact) であるとは $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ が成立することである．

次に 2 つの圏の間の対応を考えよう．

定義 1.1.15　$\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ を 2 つの圏とする．$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ が**共変関手** (covariant functor) であるとは，F は $(F_{\mathrm{Ob}}, \{F_{A,B}\}_{A,B \in \mathcal{C}})$ なる 2 つの種類の対応 $F_{\mathrm{Ob}} : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$, $F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}\big(F_{\mathrm{Ob}}(A), F_{\mathrm{Ob}}(B)\big)$ ($^\forall A, B \in \mathcal{C}$) からなり次の条件をみたすことである．以後簡単のため F_{Ob} も $F_{A,B}$ も，ともに F と書くことにする．

(1)　任意の $A \in \mathcal{C}$ に対し，$F(1_A) = 1_{F(A)}$

(2)　$\mathcal{C}$ の射 $u : A \to B$, $v = B \to C$ に対し

$$F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$$

また $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ が**反変関手** (contravariant functor) であるとは，F は $(F_{\mathrm{Ob}}, \{F_{A,B}\}_{A,B \in \mathcal{C}})$ なる 2 つの種類の対応 $F_{\mathrm{Ob}} : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$, $F_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}\big(F_{\mathrm{Ob}}(B), F_{\mathrm{Ob}}(A)\big)$ ($^\forall A, B \in \mathcal{C}$) からなり (1) と次の (2)$'$ が成立することである．

(2)$'$　$\mathcal{C}$ の射 $u : A \to B$, $v : B \to C$ に対し

$$F(v \circ u) = F(u) \circ F(v)$$

明らかに反変関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ は共変関手：$F : \mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}'$ と同値である．以後，単に関手というときには共変関手を表すことにする．

定義 1.1.16　$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ を加法的圏とする．関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ が**加法的関手** (additive functor) であるとは，$u, v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ に対して $F(u+v) = F(u) + F(v)$ が成立するときにいう．

定義 1.1.17　$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ をアーベル圏とする．$0 \to A \to B \to C \to 0$ を $\mathcal{C}$ における任意の完全列とする．関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ が**完全関手** (exact functor) であるとは，$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ がまた完全列になるときにいう．また $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ が完全列になるとき F を**左完全** (left exact), $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ が完全列になるときは F を**右完全** (right exact) という．

例 1.1.18　(i)　$\mathcal{C} = (\mathrm{Mod}_R)$ とし，$M \in \mathcal{C}$ を固定する．このとき $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $F(N) = N \otimes_R M$ とし $u : N \to N'$ に対しては $F(u) : N \otimes M \to N' \otimes M$, $n \otimes m \mapsto u(n) \otimes m$ で定義すると，F は右完全関手になる．特に M が平坦な R-加群の場合は F は完全関手になる．
(ii)　$\mathcal{C} = (\mathrm{Mod}_R)$, $M \in \mathcal{C}$ として，$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を $F(N) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ とし，$u : N \to N'$ に対しては $F(u) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N')$, $f \mapsto u \circ f$ で定義すると，F は左完全関手になる．特に M が自由加群の場合は F は完全関手になる．

次に 2 つの関手の対応を考えよう．

定義 1.1.19　2 つの関手 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ に対して $u : F \to G$ が**関手の射** (morphism of functors) または，**自然変換** (natural transformation) であるとは $u = \{u_A\}_{A \in \mathcal{C}}$ が次をみたしていることをいう：

(1)　各 $A \in \mathcal{C}$ に対し，$u_A : F(A) \to G(A)$ は $\mathcal{C}'$ における射である．

(2)　射 $f : A \to B$ に対して

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{u_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[u_B]{} & G(B) \end{array}$$

が可換になる．

定義 1.1.20　2つの関手 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ が同型であるとは，関手の射 $u : F \to G$, $v : G \to F$ が存在して，各 $A \in \mathcal{C}$ に対し $v_A \circ u_A = 1_{F(A)}, u_A \circ v_A = 1_{G(A)}$ が成立するときをいう．このとき $F \simeq G$ と表す．

関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ が同値な関手であるとは，関手 $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ が存在して $F \circ G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}'$, $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ がそれぞれ恒等関手と同型になることである．

次に層の議論に必要となってくる帰納系，帰納極限を導入しよう．

定義 1.1.21　集合 Λ 上に関係 $\succ$ が与えられ次が成立するとき $(\Lambda, \succ)$ を**有向集合** (directed set) とよぶ．

(1)　任意の $\alpha \in \Lambda$ に対して $\alpha \succ \alpha$,

(2)　$\alpha \succ \beta, \beta \succ \gamma$ に対して $\alpha \succ \gamma$,

(3)　任意の $\alpha, \beta \in \Lambda$ に対して $\gamma \in \Lambda$ が存在して，$\gamma \succ \alpha, \gamma \succ \beta$ が成立する．

定義 1.1.22　$\mathcal{C}$ を圏，Λ を有向集合とする．任意の $\alpha \in \Lambda$ に対して $A_\alpha \in \mathcal{C}$, また任意の $\alpha \succ \beta$ に対して $f_\alpha^\beta : A_\beta \to A_\alpha$ が定まり，これらの族 $\mathbb{A} = (A_\alpha, f_\alpha^\beta)_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ が次をみたしているとき，$\mathbb{A}$ を $\mathcal{C}$ の**帰納系** (inductive system) とよぶ．

(1)　任意の $\alpha \in \Lambda$ に対して $f_\alpha^\alpha = 1_{A_\alpha}$,

(2)　$\alpha \succ \beta \succ \gamma$ に対して $f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\gamma = f_\alpha^\gamma$

定義 1.1.23　$\mathbb{A} = (A_\alpha, f_\alpha^\beta)_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ を圏 $\mathcal{C}$ の帰納系とする $A \in \mathcal{C}$ と $f_\alpha : A_\alpha \to$

A からなる組 $(A, f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ が次をみたすとき，$(A, f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ を (または単に A を) $\mathbb{A}$ の**帰納極限** (inductive limit) であるという．

(1)　任意の $\alpha \succ \beta$ に対して $f_\beta = f_\alpha \circ f_\alpha^\beta$,

(2)　$B \in \mathcal{C}$, $g_\alpha : A_\alpha \to B$ からなる組 $(B, g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ が (1) の条件をみたしているとき，$g_\alpha = g \circ f_\alpha$ $(\alpha \in \Lambda)$ となるような射 $g : A \to B$ が一意的に存在する．

この A を $\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ と書く．

(2) の条件より，帰納極限は存在すれば同型を除いて一意的に決まる．勝手な帰納系に対して帰納極限が必ずしも存在するとは限らないが，圏によっては，勝手な帰納系に対して帰納極限が存在するものがある．このようなとき，この圏は「帰納極限について閉じている」ということにする．前出の圏が帰納極限について閉じているかどうかを見てみよう．

例 1.1.24　(Ouv_X) は帰納極限について閉じている．実際 $(U_\alpha, f_\alpha^\beta)_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ を任意の帰納系とするとき，$U = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ とおき，$f_\alpha : U_\alpha \to U$ を包含写像とすれば (U, f_α) が (1), (2) の条件をみたしていることがわかる．

例 1.1.25　(Sets) は帰納極限について閉じている．実際 $(A_\alpha, f_\alpha^\beta)_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ を任意の帰納系とする．$A' = \coprod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ とおき，A' に次のように関係 $\sim$ を定義する．$a, b \in A'$ を任意にとり $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$ とするとき，$\gamma \succ \alpha$, $\gamma \succ \beta$ なる $\gamma \in \Lambda$ が存在して $f_\gamma^\alpha(a) = f_\gamma^\beta(b)$ となっている時に $a \sim b$ と定義する．この $\sim$ は同値関係になっているので $\sim$ による剰余類集合 $A = A'/\sim$ を作ることができる．$f_\alpha : A_\alpha \to A$ を自然な写像とすると (A, f_α) は (1), (2) をみたしていることがわかる．

例 1.1.26　圏 (Ab), (Ring), (Mod_R) は帰納極限について閉じている．実際 $(A_\alpha, f_\alpha^\beta)_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ を任意の帰納系として，まず集合の帰納極限 $(A, f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ をとり，A に以下の自然なやり方で演算を定める．任意の A の元 $\overline{a}, \overline{b}$ は，ある $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$ の像 $f_\alpha(a)$, $f_\beta(b)$ と表されている．$\gamma \succ \alpha$, $\gamma \succ \beta$ なる $\gamma \in \Lambda$ をとり，

$f_\gamma\big(f^\alpha_\gamma(a)+f^\beta_\gamma(b)\big)$ を $\overline{a}+\overline{b}$ と定義すれば良い．この定義が γ のとり方によらないことは，帰納系の定義から導かれる．環の積や加群のスカラー倍についても同様である．

例 1.1.27　圏 (Top) は帰納極限について閉じている．これもまず集合の帰納極限をとり，商位相を導入すれば良い．

命題 1.1.28　$\mathcal{C}$ を例 1.1.24〜1.1.27 のいずれかの圏とする．帰納極限 $A=\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ について次が成立する．

(i)　任意の $a\in A$ について，$\alpha\in\Lambda$, $a_\alpha\in A_\alpha$ が存在し，$f_\alpha(a_\alpha)=a$.

(ii)　$a_\alpha\in A_\alpha$, $a_\beta\in A_\beta$ について $f_\alpha(a_\alpha)=f_\beta(a_\beta)$ ならば $\gamma\succ\alpha$, $\gamma\succ\beta$ なる $\gamma\in\Lambda$ が存在して，$f^\alpha_\gamma(a_\alpha)=f^\beta_\gamma(a_\beta)$.

(iii)　特に $\mathcal{C}=$ (Ab) (Rings) (Mod_R) については，$a\in A_\alpha$ に対し $f_\alpha(a)=0$ とすると $\beta\succ\alpha$ なる β が存在して $f^\alpha_\beta(a)=0$.

[証明]　例 1.1.24〜1.1.27 の構成より明らか．

次に帰納極限と双対な概念を導入する．

定義 1.1.29　$\mathcal{C}$ を圏，Λ を有向集合とする．任意の $\alpha\in\Lambda$ に対して，$B_\alpha\in\mathcal{C}$, また任意の $\alpha\succ\beta$ なる $\alpha,\beta\in\Lambda$ に対して射 $g^\alpha_\beta:B_\alpha\to B_\beta$ が定まり，これらの族 $\mathbb{B}=(B_\alpha,g^\alpha_\beta)_{\alpha,\beta\in\Lambda}$ が次をみたしているとき，$\mathbb{B}$ を $\mathcal{C}$ の**射影系** (projective system) とよぶ．

(1)　任意の $\alpha\in\Lambda$ に対して $g^\alpha_\alpha=1_{B_\alpha}$,

(2)　$\alpha\succ\beta\succ\gamma$ に対して $g^\alpha_\gamma=g^\beta_\gamma\circ g^\alpha_\beta$.

定義 1.1.30　$\mathbb{B}$ を圏 $\mathcal{C}$ の射影系とする．$B\in\mathcal{C}$ と $g_\alpha:B\to B_\alpha(^\forall\alpha\in\Lambda)$ からなる組 $(B,g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ が次をみたすとき，$(B,g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ を (または単に B を) $\mathbb{B}$ の**射影極限** (projective limit) であるという．

(1) 任意の $\alpha \succ \beta$ に対して $g_\beta = g^\alpha_\beta \circ g_\alpha$

(2) $C \in \mathcal{C}$, $h_\alpha : C \to B_\alpha (^\forall \alpha \in \Lambda)$ からなる組 $(C, h_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ が (1) の条件をみたしているとき，$h_\alpha = g_\alpha \circ g (^\forall \alpha \in \Lambda)$ となるような射 $g : C \to B$ が一意的に存在する．

この B を $\varprojlim_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$ と書く．

射影極限も存在すれば同型を除いて一意的に定まる．前出の圏が射影極限について閉じているかどうか練習問題とする．

1.2 位相空間上の層

X を位相空間，$\mathcal{C}$ を圏とする．(Ouv_X) を前節で導入した X の開集合の圏とする．

定義 1.2.1 $\mathcal{F}$ が X 上 $\mathcal{C}$ **に値をもつ前層** (または **$\mathcal{C}$-前層**) ($\mathcal{C}$-presheaf) であるとは，$\mathcal{F}$ が $\mathcal{F} : (\mathrm{Ouv}_X) \to \mathcal{C}$ なる反変関手であることをいう．すなわち次の条件がみたされることである．

(1) 開集合 $U \subset X$ に対し $\mathcal{F}(U) \in \mathcal{C}$ が定まり，

(2) X の開集合 $V \subset U$ の包含写像 i^V_U に対し，$\mathcal{C}$ の射 $\mathcal{F}(i^V_U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が定まり，次が成立する．ここで簡単のため以後 $\mathcal{F}(i^V_U)$ を ρ^U_V と書き**制限射** (restriction morphism) とよぶ．

(2-1) 任意の開集合 $U \subset X$ に対し $\rho^U_U = 1_{\mathcal{F}(U)}$

(2-2) 任意の開集合 $W \subset V \subset U \subset X$ に対し，$\rho^U_W = \rho^V_W \circ \rho^U_V$.

(3) 特に $\mathcal{C}$ が加法的圏の場合 $\mathcal{F}(\phi) = 0$

圏 $\mathcal{C}$ がそれぞれ (Sets) (Ab) (Rings) $(\mathrm{Mod}_R) \cdots$ などのとき，それぞれ $\mathcal{F}$ を集合の前層，アーベル群の前層 $\cdots$ などとよぶ．

定義 1.2.2 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を X 上の $\mathcal{C}$-前層とする．$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が **$\mathcal{C}$-前層の射** (morphism of $\mathcal{C}$-presheaves) であるとは，φ が関手の射になっていることをいう．

これにより，対象を X 上の $\mathcal{C}$-前層全体，射の集合 $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ を $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ な

る前層の射全体の集合と定義することにより圏ができる．この圏を $\mathrm{PFais}_X^{\mathcal{C}}$ と表す．

さらに良い性質をもっているものを定義しよう．

定義 1.2.3　$\mathcal{F}$ を X 上の $\mathcal{C}$-前層とする．$\mathcal{F}$ が **X 上の $\mathcal{C}$ に値をもつ層** (または単に **$\mathcal{C}$-層**) ($\mathcal{C}$-sheaf) であるとは，任意の開集合 $U \subset X$ と U の開被覆 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ について次が成立することである．

(1)　$s, s' \in \mathcal{F}(U)$ に対し，$\rho^U_{U_i}(s) = \rho^U_{U_i}(s')$ $({}^\forall i \in I)$ が成立しているならば $s = s'$

(2)　各 i に対し $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ があって，$\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$ が成立しているならば，$\rho^U_{U_i}(s) = s_i$ $({}^\forall i \in I)$ となるような $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する．

以後，層については $\rho^U_V(s)$ を $s|_V$ と表し $\mathcal{F}(U)$ を $\Gamma(U, \mathcal{F})$ と表すことがある．また元 $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ の U 上の**切断** (section) とよぶ．

対象を X 上の $\mathcal{C}$-層全体，射の集合 $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ を $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ なる $\mathcal{C}$-前層としての射全体の集合と定義することにより圏ができる．この圏を $\mathrm{Fais}_X^{\mathcal{C}}$ と表す．

位相空間 X に対し Ouv_X は $\succ$ を $\subset$ で定義することによって有向集合になるがこの部分集合 $\mathrm{Ouv}_{X,x} = \{U | U$ は $x \in U$ なる X の開集合$\}$ も $\succ$ によって有向集合になる．1.2.1 の (2-1) (2-2) より $(\mathcal{F}(U), \rho^U_V)_{U,V \in \mathrm{Ouv}_{X,x}}$ は帰納系になる．$\mathcal{C}$ を (Ab) (Rings) (Mod_R) とすれば，$\mathcal{C}$-前層 $\mathcal{F}$ に対し例 1.1.26 により $\varinjlim_{U \in \mathrm{Ouv}_{X,x}} \mathcal{F}(U)$ が存在する．これを $\mathcal{F}_x$ と表し $\mathcal{F}$ の x での**茎** (stalk) とよぶ．

$s \in \mathcal{F}(U)$ に対し s の $\mathcal{F}_x$ への像を s_x と表す．ここで s の**台** (support) $\mathrm{Supp}\,(s)$ を次で定義する

$$\mathrm{Supp}\,(s) = \{x \in U \mid s_x \neq 0\}$$

ここで 0 は，アーベル群または R-加群 $\mathcal{F}_x$ の零元である．台について次が成立する．以後 $\mathcal{C}$ は常に (Ab), (Rings), (Mod_R) のいずれかと仮定しよう．

命題 1.2.4　$\mathcal{F} \in \mathrm{PFais}_X^{\mathcal{C}}$ に対し開集合 $U \subset X$ 上で $s \in \mathcal{F}(U)$ を任意にとると，$\mathrm{Supp}\,(s)$ は U の閉集合になる．

［証明］ $s_x = 0$ なる $x \in U$ が存在しない時 $\mathrm{Supp}\,(s) = U$ となり，自明．$s_x = 0$ なる $x \in U$ が存在したとすると，$\mathcal{F}_x$ は帰納極限であったから 1.1.28,(iii) より $x \in V \subset U$ なる開集合 V が存在して $s|_V = 0$．したがって，${}^{\forall}y \in V$ に対し $s_y = 0$ が成立する．

ここで 2 つの切断が一致するのはどんな場合だろうか．

命題 1.2.5　$\mathcal{F} \in \mathrm{Fais}_X^{\mathcal{C}}$ とする．任意の開集合 $U \subset X$ と $s, s' \in \Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$ に対し次は同値．

(1)　$s = s'$

(2)　$s_x = s'_x$ $({}^{\forall}x \in U)$

［証明］ (1) ⇒ (2) は自明．(2) を仮定すると，1.1.28,(ii) より，各 $x \in U$ に対し，開近傍 $U_x \subset U$ があって $s|_{U_x} = s'|_{U_x}$, $U = \bigcup_{x \in U} U_x$ で $\mathcal{F}$ は層であるから 1.2.3,(1) より $s = s'$．

命題 1.2.6　$\mathcal{F} \in \mathrm{PFais}_X^{\mathcal{C}}$ に対し次の性質をもつような $\overline{\mathcal{F}} \in \mathrm{Fais}_X^{\mathcal{C}}$ が同型を除いて一意的に存在する．この $\overline{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ の**層化** (sheafification) とよぶ．

(1)　前層の射 $\theta : \mathcal{F} \to \overline{\mathcal{F}}$ があり

(2)　$\mathcal{C}$-層 $\mathcal{G}$ への $\mathcal{C}$-前層の射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が与えられたとき，射 $\psi : \overline{\mathcal{F}} \to \mathcal{G}$ が一意的に決まり，$\varphi = \psi \circ \theta$ が成立する．

［証明］ (1) (2) をみたす $\overline{\mathcal{F}}$ が存在したとき同型を除いてただ一つ決まることは (2) の ψ の一意性より出る．存在を示そう．開集合 $U \subset X$ に対し

$$\overline{\mathcal{F}}(U) = \Big\{ s = \{s(x)\}_{x \in U} \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \;\Big|\; \text{任意の } x \in U \text{ に対し } x \in V \subset U \text{ なる開集合 } V \text{ と } t \in \mathcal{F}(V) \text{ が存在し，} s(y) = t_y \ ({}^{\forall}y \in V) \text{ が成立} \Big\},$$

開集合の組 $V \subset U$ に対して $\rho^U_V : \overline{\mathcal{F}}(U) \to \overline{\mathcal{F}}(V)$ を射影 $\prod_{x\in U}\mathcal{F}_x \to \prod_{x\in V}\mathcal{F}_x$ から自然に導かれる写像とする．すると，$\overline{\mathcal{F}}$ は明らかに $\mathcal{C}$-前層になるが $\mathcal{C}$-層になることも容易に証明される．1.2.3 の条件 (1) のみを確認してみよう．(2) については読者に委ねる．

$s, s' \in \overline{\mathcal{F}}(U)$ に対し $\rho^U_{U_i}(s) = \rho^U_{U_i}(s')$ $({}^\forall i)$ が成立しているとすると $\overline{\mathcal{F}}$ の定義より $s(x) = s'(x)$ $({}^\forall x \in U)$．よって，$s = s'$．さて命題の (1) (2) がみたされることをみよう．(1) の写像 $\theta : \mathcal{F} \to \overline{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{F}(U) \to \overline{\mathcal{F}}(U)$; $s \mapsto \{s_x\}_{x\in U}$ で与えられる．(2) は $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ に対し $\psi_U : \overline{\mathcal{F}}(U) \to \mathcal{G}(U)$, $\{s(x)\}_{x\in U} \mapsto \{\varphi_{U_i}(t_i)\}_i$ と決める．ただし，$\{U_i\}$ は U の開被覆で $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ は $s(x) = t_{ix}$ $({}^\forall x \in U_i)$ をみたしているものとする．ここで 1.2.5 により $\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(\varphi_{U_i}(t_i)) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(\varphi_{U_j}(t_j))$ $({}^\forall i, j)$ であることが確かめられるので $\mathcal{G}$ が層であることより $\{\varphi_{U_i}(t_i)\}_i$ から $\mathcal{G}(U)$ の元が定まる．ψ が $\varphi = \psi\circ\theta$ をみたす前層の射であることは明らか．また $\varphi = \psi\circ\theta$ をみたす ψ はこれ以外にはない．

$\overline{\mathcal{F}}$ を X 上の前層 $\mathcal{F}$ の層化とすると，任意の $x \in X$ に対して $\overline{\mathcal{F}}_x = \mathcal{F}_x$ が成立していることが構成法よりわかる．

定義 1.2.7　$\mathcal{F}$ を X 上の (Ab)-層，$\mathcal{G}$ を X 上の $\mathcal{C}$-層とする．$\mathcal{F}$ が $\mathcal{G}$ の**部分層** (subsheaf) であるとは (Ab)-層の射 $u : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が存在し，任意の開集合 $U \subset X$ に対して $u_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が部分群の包含写像の場合にいう．$\mathcal{F}$ が $\mathcal{G}$ の部分層であるとき，開集合 $U \subset X$ に対して $\mathcal{H}(U) = \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ とおき $V \subset U$ に対して $\mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}(V)$ を $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$ から導入される射とすると $\mathcal{H}$ は (Ab)-前層になる．この層化を $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ と書き $\mathcal{G}$ の $\mathcal{F}$ による**剰余層** (quotient sheaf) とよぶ．

定義 1.2.8　$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を $\mathcal{C}$-層の射とする．$\mathcal{F}$ の部分層 $\mathcal{K}er\,\varphi$ と $\mathcal{G}$ の部分層 $\mathcal{I}m\,\varphi$ を次のように定義する．開集合 $U \subset X$ に対して

$$\mathcal{K}er\,\varphi(U) := \{s \in \mathcal{F}(U) \mid \varphi(s)_x = 0,\ {}^\forall x \in U\}$$

$\mathcal{I}m\,\varphi(U) := \{t \in \mathcal{G}(U) \mid$ 任意の $x \in U$ に対して開近傍 $x \in V_x \subset U$ と

$$s \in \mathcal{F}(V_x) \text{ が存在し } t_x = \varphi_x(s_x)\}$$

とし，$V \subset U$ に対して制限射はそれぞれ層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の制限射から導かれるもので定義する．

すると $\mathcal{K}er\,\varphi, \mathcal{I}m\,\varphi$ ともに部分層になる．それぞれ φ の**核** (kernel), φ の**像** (image) とよぶ．また $\mathcal{G}$ の $\mathcal{I}m\,\varphi$ による剰余層 $\mathcal{G}/\mathcal{I}m\,\varphi$ を**余核** (cokernel) とよび $\mathrm{Coker}\,\varphi$ と表す．

これらの核，像，余核は，圏 $\mathrm{Fais}_X^{(\mathrm{Ab})}$ の核，像，余核になる．したがって (Ab)-層の射の列の完全性が定義できる (1.1.14)．ここで $\mathcal{C} = (\mathrm{Mod}_R)$ の場合，核，像，余核はまた $\mathcal{C}$-層になる．

命題 1.2.9 (Ab)-層の射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}, \psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ に対して次は同値である：

(i) $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ は完全列である．

(ii) 任意の $x \in X$ に対し $0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{H}_x \longrightarrow 0$ がアーベル群の完全列である．

［証明］ 一般に部分層 $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$ に対して $\mathcal{I} = \mathcal{K}$ であることと $\mathcal{I}_x = \mathcal{K}_x$ が任意の $x \in X$ について成立することは同値．また任意の射 $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して $(\mathcal{K}er\,\alpha)_x = \mathrm{Ker}\,(\alpha_x), (\mathcal{I}m\,\alpha)_x = \mathrm{Im}\,(\alpha_x)$ より命題は証明される．

例 1.2.10 k を任意の体，X を位相空間，開集合 $U \subset X$ に対し，$\mathcal{F}_{X,k}(U) := \{f \mid f : U \to k \text{ 写像}\}$ とする．$V \subset U$ に対し，$\rho_V^U : \mathcal{F}_{X,k}(U) \to \mathcal{F}_{X,k}(V)$ を写像の制限 $f \mapsto f|_V$ で定義すると $\mathcal{F}_{X,k}$ は X 上の可換環の層になる．

例 1.2.11 $\mathbb{C}^n$ を通常の距離による位相空間とみなす．$W \subset \mathbb{C}^n$ を開集合とする．任意の開集合 $U \subset W$ に対し $\mathcal{O}_W^{\mathrm{hol}}(U) := \{f | f \text{ は } U \text{ 上の正則関数}\}$ とし，$V \subset U$ に対して $\rho_V^U : \mathcal{O}_W^{\mathrm{hol}}(U) \to \mathcal{O}_W^{\mathrm{hol}}(V)$ を $f \mapsto f|_V$ で定義する．すると $\mathcal{O}_W^{\mathrm{hol}}$ は W 上の可換環の層さらに $\mathbb{C}$-代数の層で，$\mathcal{F}_{W,\mathbb{C}}$ の部分層になっている．

例 1.2.12 $W \subset \mathbb{C}^n$ を開集合，$X \subset W$ を有限個の W 上の正則関数 $f_1, \cdots, f_r$

の共通零点からなる集合とする．このようなものを W の**解析的集合** (analytic set) とよぶ．開部分集合 $U \subset W$ に $\mathcal{I}(U) := \{f | f$ は U 上の正則関数で $f|_{X\cap U} = 0\}$ とおき ρ_V^U を上と同様に関数の制限で定義する．すると $\mathcal{I}$ はアーベル群の層になり $\mathcal{O}_W^{\text{hol}}$ の部分層になる．ここで $\mathcal{I}(U)$ は $\mathcal{O}_W^{\text{hol}}(U)$ のイデアルになることより $\mathcal{O}_W^{\text{hol}}(U)/\mathcal{I}(U)$ で定義される前層は可換環の前層になる．よってその層化 $\mathcal{O}_W^{\text{hol}}/\mathcal{I}$ も可換環の層さらに $\mathbb{C}$-代数の層になる．これは W 上の層であるが X 上の層と考えることもできる．実際，X の開集合 V は W の開集合 U を用いて $V = U \cap X$ と表される．$\mathcal{O}_X^{\text{hol}}(V) := \mathcal{O}_W^{\text{hol}}/\mathcal{I}(U)$ とおくと右辺は U のとり方によらないことがわかるので $\mathcal{O}_X^{\text{hol}}$ は X 上の可換環の層で $\mathcal{F}_{X,\mathbb{C}}$ の部分層である．ここで組 $(X, \mathcal{O}_X^{\text{hol}})$ を**被約な解析的局所モデル** (reduced analytic local model) とよび $\mathcal{O}_X^{\text{hol}}$ をその**構造層** (structure sheaf) とよぶ．実際 $\mathcal{O}_X^{\text{hol}}$ は被約つまり巾零元が存在しないことがわかっている．これは $\sqrt{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$ と同値であるが，このことは Hilbert の零点定理より証明される (たとえば [Mu, I, §2 Theorem 1])．$\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ を任意の部分層で各 U に対し $\mathcal{J}(U)$ が $\mathcal{I}(U)$ の部分 $\mathcal{O}_W^{\text{hol}}(U)$-イデアルで $\sqrt{\mathcal{J}(U)} = \mathcal{I}(U)$ となっている場合，組 $(X, \mathcal{O}_W^{\text{hol}}/\mathcal{J})$ を (必ずしも被約でない) **解析的局所モデル** (analytic local model) とよび，$\mathcal{O}_W^{\text{hol}}/\mathcal{J}$ を構造層，$\mathcal{J}$ を**定義イデアル** (defining ideal) とよぶ．ここで同じ X であっても構造層が異なるものは別の解析的局所モデルとみなすことに注意する．また上記 $\mathcal{J}$ に対し，$X = \{x \in W \mid f(x) = 0,\ {}^\forall f \in \mathcal{J}(W)\}$ となっている．

例 1.2.13　代数閉体 k に対し k^n の**代数的集合** (algebraic set) とは有限個の多項式 $f_1, \cdots, f_r \in k[x_1 \cdots x_n]$ の共通零点の集合になっているものである．代数的集合全体は閉集合の公理をみたすのでこれによって k^n に位相を導入できる．この位相を k^n の **Zariski 位相**という．この位相による開集合 $U \subset k^n$ に対し $\mathcal{O}_{k^n}(U) := \{f/g \mid f, g \in k[x_1 \cdots x_n],\ U$ 上で $g \neq 0\}$ とすると自然に $\rho_V^U : \mathcal{O}_{k^n}(U) \to \mathcal{O}_{k^n}(V)$ が定まる．このとき $\mathcal{O}_{k^n}$ は k^n 上の可換環の層さらに k-代数の層になる．特に $k = \mathbb{C}$ のとき $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\text{hol}}$ と区別するために $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\text{alg}}$ と書くこともある．

例 1.2.14　$X \subset k^n$ を代数的集合とする．この X に k^n の Zariski 位相から導かれる相対位相を考える．開集合 $U \subset k^n$ に対し $\mathcal{I}(U) := \{\varphi \in \mathcal{O}_{k^n}(U) \mid \varphi|_{U\cap X} = 0\}$ とすると $\mathcal{I}$ は $\mathcal{O}_{k^n}$ の部分層となる．1.2.12 と同様に商層 $\mathcal{O}_{k^n}/\mathcal{I}$ は X 上の可換環の層になることがわかる．ここで組 $(X, \mathcal{O}_{k^n}/\mathcal{I})$ を k 上の**被約なアフィン多様体** (reduced affine variety) とよび $\mathcal{O}_{k^n}/\mathcal{I}$ をその構造層という．実際この場合も Hilbert の零点定理より構造層は被約になる．$\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ を部分層で各開集合 $U \subset k^n$ に対し $\mathcal{J}(U)$ が $\mathcal{I}(U)$ の部分 $\mathcal{O}_{k^n}(U)$-イデアルで $\sqrt{\mathcal{J}(U)} = \mathcal{I}(U)$ となっている場合，組 $(X, \mathcal{O}_{k^n}/\mathcal{J})$ を (必ずしも被約でない) k 上の**アフィン多様体** (affine variety) とよび $\mathcal{O}_{k^n}/\mathcal{J}$ を構造層，$\mathcal{J}$ を**定義イデアル** (defining ideal) とよぶ．1.2.12 と同様に $X = \{x \in k^n \mid f(x) = 0, {}^\forall f \in \mathcal{J}(k^n)\}$ となっている．

1.3　解析空間，代数多様体

この節では解析空間，代数多様体を定義する．

定義 1.3.1　X を位相空間，$\mathcal{O}_X$ を X 上の可換環の層とする．このとき組 $(X, \mathcal{O}_X)$ を**環つき空間** (ringed space) とよぶ．特に各 $x \in X$ に対し，茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ が局所環であるとき $(X, \mathcal{O}_X)$ を**局所環つき空間** (locally ringed space) とよぶ．$(\varphi, \varphi^*) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が**環つき空間の射** (morphism of ringed spaces) であるとは $\varphi : X \to Y$ が連続写像で $\varphi^* : \mathcal{O}_Y \to \varphi_*\mathcal{O}_X$ が環の層の射であることである．ここで $\varphi_*\mathcal{O}_X$ は開集合 $U \subset Y$ に対し $\varphi_*\mathcal{O}_X(U) = \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ できまる可換環の層．$(\varphi, \varphi^*) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が**局所環つき空間の射** (morphism of locally ringed spaces) であるとは，環つき空間の射であってさらに φ^* から導かれる準同型 $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \xrightarrow{\varphi_x^*} \mathcal{O}_{X,x}$ が局所準同型つまり $\varphi_x^{*-1}(\mathfrak{m}_{X,x}) = \mathfrak{m}_{Y,f(x)}$ をみたすことである．

これにより環つき空間および局所環つき空間の圏が定義できる．例 1.2.10〜1.2.14 の $(X, \mathcal{F}_{X,k})$, $(W, \mathcal{O}_W) \sim (X, \mathcal{O}_{k^n}/\mathcal{J})$ は環つき空間の例である．特に 1.2.11, 1.2.12, 1.2.13, 1.2.14 は局所環つき空間の例である．

定義 1.3.2　局所環つき空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ が**解析空間** (analytic space) であるとは，X が Hausdorff 空間であって，開被覆 $X = \cup U_i$ があって，各 i について局所モデル $(V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ と局所環つき空間の同型 $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \tilde{\to} (V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ が存在することである．ここで $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ は開集合 $U \subset U_i$ に対し $\mathcal{O}_X|_{U_i}(U) := \mathcal{O}_X(U)$ で定義された U_i 上の可換環の層である．これを $\mathcal{O}_X$ の U_i への**制限層** (restricted sheaf) とよぶ．以後，解析空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ について，X を解析空間，$\mathcal{O}_X$ をその構造層ということもある．

定義 1.3.3　局所環つき空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ が k 上の**代数的前多様体** (algebraic prevariety) であるとは，有限開被覆 $X = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ があって，各 i について k 上のアフィン多様体 $(V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ と同型 $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \simeq (V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ が存在することである．この場合も解析空間の場合と同様に X を代数的前多様体，$\mathcal{O}_X$ をその構造層とよぶこともある．特に $(X, \mathcal{O}_X)$ がアフィン多様体のとき，環 $A(X) := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ を $(X, \mathcal{O}_X)$ の**アフィン座標環** (affine coordinate ring) または**アフィン環** (affine ring) とよぶ．また $k = \mathbb{C}$ のとき，解析空間と代数的前多様体を区別するために構造層をそれぞれ $\mathcal{O}_X^{\mathrm{hol}}, \mathcal{O}_X^{\mathrm{alg}}$ と書くこともある．

定義 1.3.4　2つの解析空間または k 上の代数的前多様体 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の間の射 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ とは，環つき空間としての射でさらに $\varphi^* : \mathcal{O}_Y \to \varphi_* \mathcal{O}_X$ が $\mathbb{C}$-代数または k-代数の層の射になっているものと定義する．誤解の恐れのない時は，$\mathcal{O}$ を省略して $f : X \to Y$ と表される．これにより解析空間，k 上の代数的前多様体の圏ができる．

定義 1.3.5　解析空間または k 上代数的前多様体 $(X, \mathcal{O}_X)$ が $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の**開部分空間** (open subspace) または**開部分前多様体** (open subprevariety) であるとは，射 $(i, i^*) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が存在して $i : X \hookrightarrow Y$ は開部分集合の包含写像で，i^* により $(X, \mathcal{O}_X) \simeq (X, \mathcal{O}_Y|_X)$ となっているときをいう．$(X, \mathcal{O}_X)$ が $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の**閉部分空間** (closed subspace) または**閉部分前多様体** (closed subprevariety) であるとは，射 $(i, i^*) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が存在して $i : X \hookrightarrow Y$ は閉部分集合の包含写像で，$\mathcal{O}_Y$ の部分層 $\mathcal{I}$ で $\mathcal{I}(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_Y(U)$

がイデアルとなるものが存在して i^* により同型 $\mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \simeq \mathcal{O}_X$ が導かれるときをいう．このとき $\mathcal{I}$ を X の**定義イデアル** (defining ideal) という．(φ, φ^*) : $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が**開埋め込み** (open immersion) とは $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の開部分空間または開部分前多様体 $(U, \mathcal{O}_U)$ が存在して (φ, φ^*) が同型 $(X, \mathcal{O}_X) \simeq (U, \mathcal{O}_U)$ を導くときである．**閉埋め込み** (closed immersion) も同様に定義する．

定義 1.3.6 $(V, \mathcal{O}_V)$ を $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の閉部分空間または閉部分前多様体とする．任意の $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して $(V, \mathcal{O}_V)$ の**逆像** (inverse image) $(f^{-1}(V),$ $\mathcal{O}_{f^{-1}(V)})$ を次のように定義する．$f^{-1}(V)$ は集合としての V の逆像集合，$\mathcal{O}_{f^{-1}(V)}$は商層 $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_V\mathcal{O}_X$で定義する．ただし $\mathcal{I}_V$は $(V, \mathcal{O}_V)$ の $(Y, \mathcal{O}_Y)$ での定義イデアル．$\mathcal{I}_V\mathcal{O}_X$は前層 $\mathcal{F}(U) := \left(\varinjlim_{W \supset f(U)} \mathcal{I}_V(W) \right) \mathcal{O}_X(U)$ の層化である．

次の定理はアフィン多様体の重要な性質である．

定理 1.3.7 $A : \mathcal{C} =$ (アフィン多様体の圏) $\to \mathcal{D} =$ (有限生成 k-代数) を次のように定義すると A は同値反変関手となる： $(X, \mathcal{O}_X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対し $A(X, \mathcal{O}_X) = A(X)$ アフィン環．$\mathcal{C}$ 内の射 $(\varphi, \varphi^*) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対し $A(u) := \varphi_Y^* : A(Y) \to A(X)$．またこの関手により閉埋め込み $(X, \mathcal{O}_X) \to$ $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は k 代数の全射 $A(Y) \to A(X)$ と対応する．

[略証] ここで有限生成 k-代数に A に対して $A(X) = A$ となるアフィン多様体 $(X, \mathcal{O}_X)$ がどのように決まるか見よう．A は k 上有限生成だから多項式環 $k[x_1, \cdots, x_n]$ を用いて $A \cong k[x_1, \cdots, x_n]/I$ (I はイデアル) と表される．

X を k^n の中で I に含まれる多項式の共通零点として定義する．また $\mathcal{O}_{k^n}$ の部分層 $\mathcal{I}_X$ を $\mathcal{I}_X(U) =$ (I で生成される $\mathcal{O}_{k^n}(U)$-イデアル) と定義すると $(X, \mathcal{O}_{k^n}/\mathcal{I}_X)$ が求めるものである．

命題 1.3.8 解析空間または k 上代数的前多様体の圏には直積が存在する．

[略証] 解析空間の場合は [Fis p.25]．代数的前多様体の場合は次のようにし

て構成される．まず $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ がともにアフィン多様体のとき，それぞれのアフィン座標環を $A(X)$, $A(Y)$ とすると $A(X)\otimes_k A(Y)$ をアフィン座標環にもつアフィン多様体 $(Z,\mathcal{O}_Z)$ が $(X,\mathcal{O}_X)$ と $(Y,\mathcal{O}_Y)$ の直積である．このとき位相空間 Z は直積空間 $X\times Y$ に全単射となるが位相は直積位相とは異なるので注意しなければならない．$(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ が一般の k 上代数的前多様体のとき，X, Y のアフィン開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^r$, $\{V_j\}_{j=1}^s$ をとり，直積 $(U_i,\mathcal{O}_X|_{U_i})\times(V_j,\mathcal{O}_Y|_{V_j})$ を貼り合わせて $(X,\mathcal{O}_X)\times(Y,\mathcal{O}_Y)$ が構成できる．この場合も直積の位相空間は直積空間 $X\times Y$ に全単射であるが，位相は直積位相とは異なる．

直積 $(X,\mathcal{O}_X)\times(Y,\mathcal{O}_Y)$ を $(X\times Y,\mathcal{O}_{X\times Y})$ または誤解の恐れがない場合単に $X\times Y$ と表す．

定義 1.3.9　k 上代数的前多様体 X が次の性質 (S) をみたすとき**代数的多様体** (algebraic variety) であるという．

(S)　$\Delta := (1_X, 1_X) : X \to X\times X$ が閉埋め込みである．

命題 1.3.10　k 上代数多様体の開部分前多様体および閉部分前多様体は，また k 上代数多様体になる．(これを**開部分多様体** (open subvariety), **閉部分多様体** (closed subvariety) とよぶ).

［証明］ $(U,\mathcal{O}_U)$ を $(X,\mathcal{O}_X)$ の部分前多様体とすると $\Delta(U)=\Delta(X)\cap(U\times U)$. 条件 (S) は $\Delta(X)\subset X\times X$ が閉集合になることと同値である ([Ha2, II, Cor 4.2]) ので，U についても (S) が示される．

例 1.3.11　k 上アフィン多様体は k 上代数多様体である．

実際，図式：

$$\begin{array}{ccc} A(X) & \xleftarrow{\ 1_{A(X)}\ } & A(X) \\ {\scriptstyle 1_{A(X)}}\uparrow & & \\ A(X) & & \end{array}$$

に対して射 $\Delta^* : A(X)\otimes_k A(X)\to A(X)$, $f\otimes g\mapsto f\cdot g$ を考えると次の可換

図式が得られる：

$$
\begin{array}{ccccc}
A(X) & \xleftarrow{1_{A(X)}} & A(X) & & \ni f \\
{\scriptstyle 1_{A(X)}}\uparrow & \nwarrow^{\Delta^*} & \downarrow & & \downarrow \\
A(X) & \longrightarrow & A(X) \otimes_k A(X) & & \ni f \otimes 1 \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\
g & \longmapsto & 1 \otimes g & &
\end{array}
$$

よって 1.3.7 により Δ^* は条件 (S) の射 Δ に対するアフィン環の準同型である．明らかに Δ^* は全射なので 1.3.7 により対応する Δ は閉埋め込みである．

特にアフィン多様体 $(k^n, \mathcal{O}_{k^n})$ を $\mathbb{A}^n_k$ と表す．

例 1.3.12 (射影空間 $\mathbb{P}^n_k$) $U_i = \mathbb{A}^n_k$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ とおき，これらを次のように貼り合わせた k 上代数的前多様体は，k 上代数多様体になる．これを $\mathbb{P}^n_k$ と表し k 上の**射影空間** (projective space) とよぶ．

U_i のアフィン座標環 $A(U_i)$ を $k[y_{i0}, \cdots, \widehat{y}_{ii}, \cdots, y_{in}]$ と表す．ここで $\widehat{y}_{ii}$ は y_{ii} が登場しないことを表す．各 U_i 上で $y_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$ をみたす開集合を U_{ij} と表すとこれは $k[y_{i0}, \cdots, \widehat{y}_{ii}, \cdots, y_{in}]_{y_{ij}}$ をアフィン座標環にもつアフィン多様体である．対応 $y_{i\ell} \mapsto y_{j\ell}/y_{ji}$ $(\ell \neq i, j)$, $y_{ij} \mapsto 1/y_{ji}$ によって k-代数の準同型 $k[y_{i0}, \cdots, \widehat{y}_{ii}, \cdots, y_{in}]_{y_{ij}} \to k[y_{j0}, \cdots, \widehat{y}_{jj}, \cdots, y_{jn}]_{y_{ji}}$ を定義すると，これは逆写像 $y_{j\ell} \mapsto y_{i\ell}/y_{ij}$ $(\ell \neq i, j)$, $y_{ji} \mapsto 1/y_{ij}$ をもつので，同型 $\varphi_{ij} : A(U_{ij}) \xrightarrow{\sim} A(U_{ji})$ を得る．よって 1.3.7 により同型 $U_{ij} \cong U_{ji}$ を得る．この同型により $\{U_i\}$ を貼り合わせる．貼り合わせが矛盾なくできることは φ_{ij} によって同型 $A(U_{ij} \cap U_{ik}) \xrightarrow{\sim} A(U_{ji} \cap U_{jk})$ が得られることから出る．

$\mathbb{P}^n_k$ が k 上の代数多様体になる証明はたとえば [Ha2, II, 4.9].

次に $\mathbb{P}^n_k$ がどんな集合になっているかを見よう．k^{n+1} の点を $(x_0, \cdots, x_n)$ で表し $k^{n+1} \setminus \{0\}$ に次のように関係 $\sim$ を定義する：

$$(x_0, \cdots, x_n) \sim (x'_0, \cdots, x'_n) \Leftrightarrow {}^{\exists}\lambda \in k \setminus \{0\},\ x'_i = \lambda x_i\ ({}^{\forall}i).$$

すると $\sim$ は同値関係になり，その剰余類集合を $k^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ と表し，この元を $\overline{x}$ $(x \in k^{n+1} \setminus \{0\})$ と表すと，写像 $U_i \to k^{n+1} \setminus \{0\}/\sim;\ (y_{i0}, \cdots, \widehat{y}_{ii}, \cdots, y_{in}) \mapsto$

$\overline{(y_{i0},\cdots,y_{ii-1},1,y_{ii+1},\cdots,y_{in})}$ は，貼り合わせることができ，全単射 $\mathbb{P}^n_k \to k^{n+1}\setminus\{0\}/\sim$ を得る．$\mathbb{P}^n_k$ の点を対応する類の代表元 $(x_0,\cdots,x_n)$ を用いて，$(x_0:x_1:\cdots:x_n)$ と表し，これをその点の**斉次座標** (homogeneous coordinates) とよぶ．$f(X_0,\cdots,X_n)$ を次数 d の斉次多項式とすると，任意の $\lambda\in k\setminus\{0\}$ に対し，$f(x_0,\cdots,x_n)=0 \Leftrightarrow f(\lambda x_0,\cdots,\lambda x_n)=\lambda^d f(x_0,\cdots,x_n)=0$ であるから，斉次座標のとり方によらず f の零点集合が定義できる．これは各 U_i に制限すると $f_i(Y_{i0},\cdots,\widehat{Y}_{ii},\cdots,Y_{in}):=f(Y_{i0},\cdots,Y_{ii-1},1,Y_{ii+1},\cdots,Y_{in})$ の零点集合と一致する．したがって f の零点集合は $\mathbb{P}^n_k$ の閉集合になる．f_i を f の**非斉次化** (dehomogenization) とよび f を f_i の**斉次化** (homogenization) とよぶ．$f(X_0,\cdots,X_n)=X_i^d f_i\left(\frac{X_0}{X_i},\cdots,\frac{\widehat{X_i}}{X_i},\cdots,\frac{X_n}{X_i}\right)$ という関係がある．

次に代数的前多様体であって代数的多様体でない例を示そう．

例 1.3.13　$i=1,2$ に対し $(X_i,\mathcal{O}_{X_i})\cong\mathbb{A}^1_k$ とし，各々のアフィン環を $A(X_i)=k[x_i]$ $(i=1,2)$ とする．$x_i\neq 0$ で定義される開集合を $U_i\subset X_i$ とし，同型 $\Gamma(U_1\mathcal{O}_{X_1|_{U_1}})\xrightarrow{\sim}\Gamma(U_2,\mathcal{O}_{X_2}|_{U_2})$, $x_1\mapsto x_2$ で X_1 と X_2 の貼り合わせを定義する．こうしてできた代数的前多様体を X とし，U_i に対応する X の開集合を U とする．すると，X は代数多様体ではない．実際次のようにして X が条件 (S) をみたしていないことがわかる．$X\times X$ の中で $\Delta(U)=\{(x,x)\mid x\in U\}$ の閉包をとると，$\overline{\Delta(U)}=\Delta(U)\cup\{(P_1,P_1),(P_1,P_2),(P_2,P_1),(P_2,P_2)\}$ となる．ここで $\{P_1,P_2\}=X\setminus U$．ところが $\Delta(X)$ は $\Delta(U)$ を稠密な開集合として含み $\Delta(X)=\Delta(U)\cup\{(P_1,P_1),(P_2,P_2)\}\subsetneqq\overline{\Delta(U)}$ であるので，閉集合ではない．よって $\Delta:X\hookrightarrow X\times X$ は閉埋め込みではない．

定義 1.3.14　解析空間または k 上代数多様体が**被約** (reduced) であるとは構造層 $\mathcal{O}_X$ が被約であることをいう．これは任意の点 $x\in X$ に対し茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ が巾零元をもたないことで定義する．

代数多様体 (または解析空間) $(X,\mathcal{O}_X)$ が**既約** (irreducible) であるとは $X=X_1\cup X_2$ となるような真の閉部分集合 (または真の閉部分空間) $X_i\subsetneqq X$ $(i=1,2)$ が存在しないことである．

代数多様体 $(X, \mathcal{O}_X)$ が既約かつ被約のとき，代数的**整多様体** (integral variety) という．

代数多様体 $(X, \mathcal{O}_X)$ が整であることと，X が連結であって任意の $x \in X$ に対し $\mathcal{O}_{X,x}$ が整域 (零因子をもたない) ということは同値である．代数多様体 X がその真の既約な閉部分多様体 X_i $(X_i \not\subset X_j, i \neq j)$ によって $X = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$ となっているとき，各 X_i を X の**既約成分** (irreducible component) とよぶ．射影空間の閉部分多様体を**射影的多様体** (projective variety) とよぶ．射影的多様体の開部分多様体を**擬射影的多様体** (quasi-projective variety) とよぶ．

定義 1.3.15 代数多様体または解析空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ の点 $x \in X$ での次元 $\dim_x X$ を次で定義する．

$$\dim_x X = \sup \left\{ k \,\middle|\, \begin{array}{l} k \text{ は既約な閉部分多様体の列 } x \in Z_0 \subsetneqq Z_1 \cdots \subsetneqq Z_k \subset U \\ \text{の長さ，} U : x \text{ の任意の開近傍} \end{array} \right\}$$

また $\sup_{x \in X} \dim_x X$ を X の**次元** (dimension) とよび $\dim X$ と表す．

点 $x \in X$ での次元 $\dim_x X$ は $\mathcal{O}_{X,x}$ の Krull-次元と一致することに注意 (Krull 次元については [Ma2 p.30])．また $\dim \mathbb{A}_k^n = n$, $\dim \mathbb{P}_k^n = n$ であることがわかる．

1.4 連接層

定義 1.4.1 $(X, \mathcal{O}_X)$ を環つき空間とする．X 上のアーベル群の層 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}_X$-**加群の層** (sheaf of $\mathcal{O}_X$-modules) または単に $\mathcal{O}_X$-**加群** ($\mathcal{O}_X$-Module) であるとは，任意の開集合 $U \subset X$ に対し，$\mathcal{F}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$-加群になり，開集合の組 $V \subset U \subset X$ に対し

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U), & (h, f) & \longmapsto & h \cdot f \\ \downarrow & & \downarrow & \mapsdown & & \mapsdown \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V), & (h|_V, f|_V) & \longmapsto & h \cdot f|_V \end{array}$$

が可換になることである．

$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ を $\mathcal{O}_X$-加群の層とする．アーベル群の層の射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ は各開集合 $U \subset X$ に対して $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$-加群の準同型をひきおこしているとき **$\mathcal{O}_X$-加群の射** (morphism of $\mathcal{O}_X$-Modules) とよぶ．これにより $\mathcal{O}_X$-加群の圏が定義できる．これを $(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ と表す．$(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ はアーベル圏になる．

特に，各 U に対し $\mathcal{F}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ のイデアルになっているとき $\mathcal{F}$ を **$\mathcal{O}_X$-イデアル** ($\mathcal{O}_X$-Ideal) とよぶ．解析空間または代数多様体 $(X, \mathcal{O}_X)$ の閉部分多様体の定義イデアルは $\mathcal{O}_X$-イデアルである．

与えられた $\mathcal{O}_X$-加群から新しく $\mathcal{O}_X$-加群を構成する方法をいくつか示そう．

定義 1.4.2　(i)　$\mathcal{F}, \mathcal{G} \in (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ に対し $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \{\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G} \mid \mathcal{O}_X\text{-加群の射}\}$ とおくとこれは $\mathcal{O}_X(X)$-加群になる．開集合 $U \subset X$ に対して $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X|U}}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ とおく．開集合の組 $V \subset U$ に対し $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(V)$ を自然な制限写像とすると，$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ は $\mathcal{O}_X$-加群の層になる．

(ii)　$\mathcal{F}, \mathcal{G} \in (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ に対し，前層 $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ から層化によって得られる層 (1.2.6 参照) を $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ と表し $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の $\mathcal{O}_X$ の**テンソル積** (tensor product) とよぶ．これも $\mathcal{O}_X$-加群の層になる．

(iii)　$f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を環つき空間の射とする．$\mathcal{F} \in (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ に対し Y 上の前層 $U \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ は $\mathcal{O}_Y$-加群の層になる．これを $f_*\mathcal{F}$ と書き，$\mathcal{F}$ の f による**順像の層** (direct image sheaf) とよぶ．

(iv)　$f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を環つき空間の射とする．$\mathcal{G} \in (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_Y})$ に対し X 上の前層 $V \mapsto \varinjlim_{U \supset f(V)} \mathcal{G}(U)$ から層化によって得られる層を $f^{-1}\mathcal{G}$ と表す．すると $f^{-1}\mathcal{G}$ は $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-加群の層である．また自然な環の層としての射 $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ があるので $\mathcal{O}_X$ は $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-加群の層と考えられる．

(v)　$f, \mathcal{G}$ を上と同様とする．テンソル積 $f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ を $f^*\mathcal{G}$ と表し，$\mathcal{G}$ の f による**逆像** (inverse image) とよぶ．するとこれは $\mathcal{O}_X$-加群の層になる．また特に定義より明らかに $f^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ となる．

さて多様体の上の重要な層は連接層になっているのであるが連接層を導入するために準備をしよう.

定義 1.4.3 (i) $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ が**有限型** (finite type) であるとは, 任意の点 $x \in X$ に対して x の開近傍 U が存在し, U 上の $\mathcal{O}_X$-加群の層の全射 $\mathcal{O}_X|_U^r \to \mathcal{F}|_U$ が存在することである.

ここで, $\mathcal{O}_X|_U^r$ は $\mathcal{O}_X|_U$ の r 個の直積を表す. なお, 層 $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ の直積 $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ は $(\mathcal{G} \times \mathcal{H})(U) = \mathcal{G}(U) \times \mathcal{H}(U)$ で定義される層である.

(ii) $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ が**有限表現** (finite representation) であるとは, 任意の点 $x \in X$ に対して x の開集合 U が存在し, U 上の $\mathcal{O}_X|_U$-加群の層の完全列 $\mathcal{O}_X|_U^m \to \mathcal{O}_X|_U^n \to \mathcal{F}|_U \to 0$ が存在することである.

定義 1.4.4 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ が**連接的** (cohérent) であるとは, 次の 2 条件が成立することである.

(i) $\mathcal{F}$ は有限型

(ii) 任意の開集合 $U \subset X$ と任意の射 $\alpha : \mathcal{O}_X|_U^r \to \mathcal{F}|_U$ に対し $\operatorname{Ker}\alpha$ が有限型である.

明らかに連接的ならば有限表現であるが逆は一般には成立しない. しかし我々がここで扱う主な対象においては逆も成立しているのである. それを紹介する前にいくつか準備しよう.

連接性の伝播については次の命題が基本的である.

命題 1.4.5 $(X, \mathcal{O}_X)$ を環つき空間とすると $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{F}', \mathcal{F}''$ について次が成立する.

(1) $\mathcal{G}$ が $\mathcal{F}$ の部分層とする. $\mathcal{F}$ が連接的であるとき $\mathcal{G}$ が連接的であることと $\mathcal{G}$ が有限型であることは同値.

(2) $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ が完全列であるとき, どれか 2 つが連接的であるなら残りの 1 つも連接的になる.

(3) $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を $\mathcal{O}_X$-加群の射とする. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が連接的であるとき, $\operatorname{Ker}\alpha$,

Coker α はともに連接的である．

(4) $\mathcal{F},\mathcal{G}$ がともに連接的であるとき，$\mathcal{F}\times\mathcal{G}$ も $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ も連接的となる．

証明は [Se1, I, §2] 参照．

命題 1.4.6　環つき空間 $(X,\mathcal{O}_X)$ において，$\mathcal{O}_X$ 自身が連接的ならば，任意の $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ について，次は同値である．

(1) $\mathcal{F}$ は連接的

(2) $\mathcal{F}$ は有限表現

［証明］ (1) $\Rightarrow$ (2) は明らか．(2) を仮定すると X の開被覆 $\{U_i\}$ が存在して $\mathcal{O}_X|_{U_i}^r \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{O}_X|_{U_i}^s \xrightarrow{\psi_i} \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow 0$ が完全となっている．$\mathcal{F}$ が連接的であるためには各 U_i に対して $\mathcal{F}|_{U_i}$ が連接的になっていることを示せば十分．仮定と命題 1.4.5,(4) より $\mathcal{O}_X|_{U_i}^r$, $\mathcal{O}_X|_{U_i}^s$ は連接的となり，命題 1.4.5,(3) より $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathrm{Coker}\,\varphi_i$ も連接的となることがわかる．

定理 1.4.7　解析空間および代数多様体の構造層はそれ自身が連接的である．

［証明］ 解析空間については，まず岡の連接定理により $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\mathrm{hol}}$ が連接的であることが示され (証明は [Nar] 参照) Cartan により解析集合 W の定義イデアル $\mathcal{I}_W^{\mathrm{hol}}$ が連接的であることが示された ([Ab] 参照) ので命題 1.4.5 の (2) よりしたがう．代数多様体については，Serre により証明された．([Se1, II, §2] 参照)．

命題 1.4.8　(Mu, III, §1, 3 & §2, Def.1])　アフィン環 A をもつアフィン多様体 $(X,\mathcal{O}_X)$ 上の $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ に対して次は同値である：

(i) $\mathcal{F}$ は連接的である．

(ii) $\Gamma(X,\mathcal{F})$ が有限生成 A-加群であって，任意の $f\in A$ に対し $X_f := \{x\in X \mid f(x)\neq 0\}$ とするとき $\Gamma(X_f,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})\otimes_A A_f$.

連接層の重要な例を示そう．

例 1.4.9 解析空間または k 上代数多様体 $(X, \mathcal{O}_X)$ に対し，閉埋め込み $\Delta : (X, \mathcal{O}_X) \to (X \times X, \mathcal{O}_{X \times X})$ の定義イデアルを $\mathcal{I}$ とするとき $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ は X 上の層になる．これを Ω_X と表し，X 上の**微分の層** (sheaf of differentials) とよぶ．これは連接的 $\mathcal{O}_X$-加群になる．各 $x \in X$ に対し，$\Omega_{X,x}$ は $df := f \otimes 1 - 1 \otimes f$ $(f \in \mathcal{O}_{X,x})$ なるもので $\mathcal{O}_{X,x}$ 上生成されている．アフィン開集合 U 上の $\Gamma(U, \Omega_X)$ についても同様である．

命題 1.4.10 Ω_X について次が成立：

(i) $f \in k$ とすると $df = 0$

(ii) $a \in k$, $f, g \in \mathcal{O}_X$ に対し $d(f+g) = df + dg$, $d(fg) = fdg + gdf$, $d(af) = adf$

[証明] $\Omega_{X,x} \cong \mathcal{I}_{(x,x)}/\mathcal{I}^2_{(x,x)}$ であるから $\mathcal{O}_{X,x}$-微分加群の性質 ([Ma2, 9, 25]) より $\Omega_{X,x}$ において (i) (ii) が成立するので Ω_X でも成立．

次に解析空間のトポロジーに関する定理を述べよう．これは重要で，しばしば用いられる．

定理 1.4.11 X を解析空間，Y を X の閉部分解析空間とする．X が非特異な解析空間 M に埋め込まれているとき，X の中に Y の開近傍 U が存在して，Y は U および $\overline{U}$ の変位レトラクトである．

[略証] Whitney の定理 [Wh] より M はある実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に埋め込まれるので，X は $\mathbb{R}^n$ の実解析空間，Y はその閉部分実解析空間と考えてよい．したがって，X の 3 角形分割 K と Y の 3 角形分割 L が存在し，L は K の部分複体となっている．このとき L の K の中における星状近傍 $St(L) = \bigcup_{\substack{\sigma \cap |L| \neq \phi \\ \sigma \in K}} \sigma$ を考えると，$Y = |L|$ は $St(L)$ の中で変位レトラクトになることが，K の重心細分を用いて示される．$St(L)$ を $\overline{U}$ とし，$U = \overline{U}^\circ$ とすればよい．

第 2 章　ホモロジー代数と双対性

小人 例を忘れあるいは 例に溺れる.

この章では入射的分解を用いて導来関手，コホモロジー群を導入し，双対性定理，スペクトル列を紹介する．これらの概念をご存じの読者には第 1 章同様この章をとばして読み進まれることを推める.

2.1　入射的分解

この節では圏 $\mathcal{C}$ は (Ab), (Mod_R), ($\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}$) とする．ただし $(X, \mathcal{O}_X)$ は任意の環つき空間とする．コホモロジーを定義するために入射的分解というものを導入するのであるが，まず入射的対象を準備することから始めよう.

命題 2.1.1　$\mathcal{C}$ の対象 M を一つ固定し次のように $h_M : \mathcal{C} \to (\mathrm{Ab})$ を定義する．$A \in \mathcal{C}$ に対し $h_M(A) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, M)$, $\mathcal{C}$ の射 $f : A \to B$ に対して，$h_M(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, M)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$. すると h_M は反変関手になる．さらに $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ が $\mathcal{C}$ の完全列であるとき，$0 \longrightarrow h_M(C) \xrightarrow{h_M(g)} h_M(B) \xrightarrow{h_M(f)} h_M(A)$ は (Ab) の完全列になる.

［証明］ $\varphi \in h_M(B)$ に対し $h_M(f)(\varphi) = \varphi \circ f = 0$ とする．これは $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, \varphi$ を意味するが，$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ より $\varphi : B \to M$ は $g : B \to C$ を経由して分解する．これにより $\mathrm{Ker}\, h_M(f) \subset \mathrm{Im}\, h_M(g)$. あとは易しい.

定義 2.1.2　$M \in \mathcal{C}$ が**入射的対象** (injective object) であるとは，h_M が完全関手であることをいう．つまり $0 \to A \to B \to C \to 0$ なる $\mathcal{C}$ 内の完全列から得られる (Ab) 内の列 $0 \to h_M(C) \to h_M(B) \to h_M(A) \to 0$ がまた完全になることである．

次は容易である．

命題 2.1.3　次は同値である．

(1)　$M \in \mathcal{C}$ は入射的対象

(2)　$\mathcal{C}$ 内の任意の単射 $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ に対し，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, M), \psi \mapsto \psi \circ f$ が全射

(3)　$\mathcal{C}$ 内の任意の単射 $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ と任意の射 $\varphi : A \to M$ に対し $\psi : B \to M$ が存在して $\varphi = \psi \circ f$.

命題 2.1.4　任意の対象 $M \in \mathcal{C}$ に対し入射的対象 $L \in \mathcal{C}$ と単射 $M \hookrightarrow L$ が存在する．

［証明］ (Ab), (Mod_R) については，たとえば [Ho, 定理 22.2] の証明参照．($\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}$) については，任意の $\mathcal{M} \in (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ に対して，次のように入射的対象 $\mathcal{L}$ を定義する．各点 $x \in X$ に対し $\mathcal{M}_x \hookrightarrow L(x)$ なる入射的 $\mathcal{O}_{X,x}$-加群 $L(x)$ をとり $\mathcal{L}(U) := \prod_{x \in U} L(x)$, $\rho^U_V : \mathcal{L}(U) \to \mathcal{L}(V)$, $(s_x)_{x \in U} \mapsto (s_x)_{x \in V}$ と定義すると，この $\mathcal{L}$ が求めるものである．

この命題を用いて次が証明される．

命題 2.1.5　次は同値である

(1)　M は入射的対象である．

(2)　任意の完全列 $0 \longrightarrow M \overset{\alpha}{\longrightarrow} L \overset{\beta}{\longrightarrow} N \longrightarrow 0$ は分裂する．ここで**分裂する** (splits) とは同型 $\rho : L \overset{\sim}{\to} M \oplus N$ が存在し次が可換になることである．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\big| \ 1_M & & \wr\downarrow \rho & & \wr\big| \ 1_N & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M \oplus N & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

[証明] M が入射的ならば，単射 $M \overset{\alpha}{\hookrightarrow} L$ と恒等射 $M \xrightarrow{1_M} M$ に対し 2.1.3,(3) により $1_M = \psi \circ \alpha$ なる $\psi : L \to M$ が存在する．これから分裂を導くことは易しい．逆に (2) を仮定する．L を M に対し 2.1.4 で得た入射的対象とし，完全列 $0 \to M \to L \to L/M \to 0$ を考えると，(2) より $L \overset{\sim}{\to} M \oplus L/M$．入射的対象の直和因子はまた入射的になるので (1) がしたがう．

定義 2.1.6　(1)　$A^\cdot = (A^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ が $\mathcal{C}$ における**コチェイン複体** (cochain complex) または単に複体であるとは，各 $i \in \mathbb{Z}$ に対し $A^i \in \mathcal{C}$ であり，$d^i : A^i \to A^{i+1}$ が $\mathcal{C}$ の射であり，$d^i \circ d^{i-1} = 0$ が成立していることをいう．

ここで d^i を $A^\cdot$ の**境界作用素** (boundary operator) とよぶ．d^i の i や，$(A^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ の d^i は，しばしば省略されることがある．

(2)　$A^\cdot, B^\cdot$ をコチェイン複体とする．$u = (u^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ がコチェイン複体の射 $A^\cdot \to B^\cdot$ であるとは，各 i に対し $u^i : A^i \to B^i$ が $\mathcal{C}$ の射であり

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & A^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & A^i & \xrightarrow{d^i} & A^{i+1} & \longrightarrow \\ & u^{i-1}\downarrow & & \downarrow u^i & & \downarrow u^{i+1} & \\ \longrightarrow & B^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & B^i & \xrightarrow{d^i} & B^{i+1} & \longrightarrow \end{array}$$

が可換になることである．

(1) (2) により $\mathcal{C}$ におけるコチェイン複体の圏が定義された．これを $K(\mathcal{C})$ と表す．

命題 2.1.7　$K(\mathcal{C})$ はアーベル圏である．

[略証] $u : A^\cdot = (A^i, d_A^i) \to B^\cdot = (B^i, d_B^i)$ に対し $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Ker} u^i, d_A^i|_{\operatorname{Ker} u^i})$, $\operatorname{Coker} u = (\operatorname{Coker} u^i, \overline{d}_B^i)$ ただし $\overline{d}_B^i : \operatorname{Coker} u^i \to \operatorname{Coker} u^{i+1}$ は d_B^i から導か

れた射である．

以後特に断らない限り，$A^i = 0\ (i < 0)$ なる複体のみを扱う．これを $A^{\cdot} = (A^i)_{i \geq 0}$ と表す．これから複体に対してコホモロジーを定義する．

定義 2.1.8　$C^{\cdot} \in K(\mathcal{C})$ に対して

$$Z^i(C^{\cdot}) := \mathrm{Ker}\,(C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1}) \subset C^i$$
$$B^i(C^{\cdot}) := \mathrm{Im}\,(C^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} C^i) \subset C^i$$

とおくと，$d^i \cdot d^{i-1} = 0$ より $B^i(C^{\cdot}) \subset Z^i(C^{\cdot})$ となる．ここで $H^i(C^{\cdot}) := Z^i(C^{\cdot})/B^i(C^{\cdot})$ と定義し $\boldsymbol{i}$ **次コホモロジー** (i-th cohomology) とよぶ．

2.1.9　$K(\mathcal{C})$ での射 $u : K^{\cdot} \to M^{\cdot}$ に対して $\mathcal{C}$ での射 $H^i(u) : H^i(K^{\cdot}) \to H^i(M^{\cdot})$ が次のように自然に導かれる．可換性：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & K^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & K^i & \xrightarrow{d^i} & K^{i+1} & \longrightarrow \\
 & \downarrow u^{i-1} & \curvearrowright & \downarrow u^i & \curvearrowright & \downarrow u^{i+1} & \\
\longrightarrow & M^{i-1} & \underset{d^{i-1}}{\longrightarrow} & M^i & \underset{d^i}{\longrightarrow} & M^{i+1} & \longrightarrow
\end{array}$$

から $u^i(B^i(K^{\cdot})) \subset B^i(M^{\cdot}), u^i\big(Z^i(K^{\cdot})\big) \subset Z^i(M^{\cdot})$ が得られるので $H^i(u) : Z^i(K^{\cdot})/B^i(K^{\cdot}) \to Z^i(M^{\cdot})/B^i(M^{\cdot})$ が導かれる．これにより $H^i : K(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$, $K^{\cdot} \mapsto H^i(K^{\cdot})$ は共変関手になる．

複体の短完全列からコホモロジーの長完全列が導びかれる．

定理 2.1.10　(i)　$K(\mathcal{C})$ における完全列：

$$0 \longrightarrow K^{\cdot} \xrightarrow{u} L^{\cdot} \xrightarrow{v} M^{\cdot} \longrightarrow 0$$

に対し，任意の $i \geq 0$ について $H^i(M^{\cdot}) \xrightarrow{\partial^i} H^{i+1}(K^{\cdot})$ が存在し，列：

$$\begin{array}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xrightarrow{\partial^{i-1}} H^i(K^\cdot) \xrightarrow{H^i(u)} H^i(L^\cdot) \xrightarrow{H^i(v)} H^i(M^\cdot) \\ \xrightarrow{\partial^i} H^{i+1}(K^\cdot) \longrightarrow H^{i+1}(L^\cdot) \longrightarrow H^{i+1}(M^\cdot) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

が完全になる．

(ii)　完全列の可換図式：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K^\cdot & \xrightarrow{u} & L^\cdot & \xrightarrow{v} & M^\cdot & \longrightarrow & 0 \\ & & f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K'^\cdot & \xrightarrow{u'} & L'^\cdot & \xrightarrow{v'} & M'^\cdot & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

に対して

$$\begin{array}{ccc} H^i(M^\cdot) & \xrightarrow{\partial^i} & H^{i+1}(K^\cdot) \\ H^i(h)\downarrow & & \downarrow H^{i+1}(f) \\ H^i(M'^\cdot) & \xrightarrow[\partial^i]{} & H^{i+1}(K'^\cdot) \end{array}$$

は可換になる．

［略証］ 完全性により次の図式は可換で横列はすべて $\mathcal{C}$ での完全列である．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K^i & \xrightarrow{u^i} & L^i & \xrightarrow{v^i} & M^i & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K^{i+1} & \xrightarrow{u^{i+1}} & L^{i+1} & \xrightarrow{v^{i+1}} & M^{i+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K^{i+2} & \longrightarrow & L^{i+2} & \longrightarrow & M^{i+2} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$H^i(M^\cdot)$ の各元 $\bar{x}$ に対し対応する $x \in Z^i(M^\cdot) \subset M^i$ をとると完全性より $v^i(y) = x$ なる $y \in L^i$ が存在する．$v^{i+1} \circ d_L^i(y) = d_M^i \circ v^i(y) = 0$ より $u^{i+1}(z) = d_L^i(y)$ なる $z \in K^{i+1}$ が存在する．この z は $Z^{i+1}(K^\cdot)$ の元である．実際 $u^{i+2} \circ d_K^{i+1}(z) = d_L^{i+1} \circ u^{i+1}(z) = d_L^{i+1} \circ d_L^i(y) = 0$ であるが u^{i+2} は単射

だから，$d_K^{i+1}(z) = 0$. ここで $\partial^i(\overline{x}) := \overline{z}$ と定義すればよい．ただし $\overline{z}$ は z に対応する $H^{i+1}(K^\cdot)$ の元を表す．

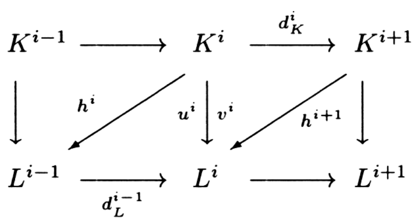
定義 2.1.11　$A \in \mathcal{C}$ に対し，$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} L^\cdot$ が**右分解** (right resolution) とは，$L^\cdot = (L^i, d^i)$ がコチェイン複体であって $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} L^0 \xrightarrow{d^0} L^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$ が完全列であることをいう．さらに各 L^i が入射的対象であるとき**入射的分解** (injective resolution) とよぶ．

命題 2.1.12　任意の対象 $A \in \mathcal{C}$ は入射分解をもつ．

［証明］ 2.1.4 により $A \overset{\varepsilon}{\hookrightarrow} L^0$ なる入射的対象 L^0 が存在．$\mathrm{Coker}\,\varepsilon \hookrightarrow L^1$ なる入射的対象 L^1 をとり，結合 $L^0 \to \mathrm{Coker}\,\varepsilon \hookrightarrow L^1$ を d^0 とする．$\mathrm{Coker}\,d^0$ に対して同様に L^2, d^1 を定義．以下順次構成できる．

2つの複体から得られるコホモロジーが同型になるのはどんな場合であろうか．

定義 2.1.13　$K(\mathcal{C})$ における 2 つの射，$u, v : K^\cdot \to L^\cdot$ が**ホモトピー的** (homotopic) であるとは $\mathcal{C}$ の射の組 $h = \{h^i\}_{i \geq 0}$, $h^i : K^i \to L^{i-1}$ が存在して $u^i - v^i = h^{i+1} \circ d_K^i + d_L^{i-1} \circ h^i$ ($^\forall i \geq 0$) が成立するときをいう．このとき $u \simeq_h v$ と表す．



命題 2.1.14　$K(\mathcal{C})$ における 2 つの射 $u, v : K^\cdot \to L^\cdot$ に対して $u \simeq_h v$ とすると任意の $i \geq 0$ に対して $H^i(u) = H^i(v) : H^i(K^\cdot) \to H^i(L^\cdot)$.

［証明］ $u^i - v^i = h^{i+1} \circ d_K^i + d_L^{i-1} \circ h^i$ であるから $x \in Z^i(K^\cdot)$ に対して

$u^i(x) - v^i(x) = d_L^{i-1} \circ h^i(x)$. したがって $u^i(x) \equiv v^i(x)$ $\bigl(\text{mod. } B^i(L^\cdot)\bigr)$.

定義 2.1.15　2つの複体 $K^\cdot, L^\cdot \in K(\mathcal{C})$ に対して，射 $u : K^\cdot \to L^\cdot$, $v : L^\cdot \to K^\cdot$ が存在して，$u \circ v \simeq_h 1_{L^\cdot}$, $v \circ u \simeq_{h'} 1_{K^\cdot}$ となるとき，$K^\cdot, L^\cdot$ が**ホモトピー同値** (homotopically equivalent) であるという．

$K^\cdot$, $L^\cdot$ がホモトピー同値であるとき $H^i(u) : H^i(K^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^i(L^\cdot)$, $H^i(v) : H^i(L^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^i(K^\cdot)$ は共に $\mathcal{C}$ での同型となり互いに他の逆射になる．

命題 2.1.16　$\varphi : A \to B$ を $\mathcal{C}$ に於ける射とする．$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon_A} K^\cdot$ を A の右分解，$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\varepsilon_B} L^\cdot$ を B の入射的分解とする．このとき $K(\mathcal{C})$ の射 $u : K^\cdot \to L^\cdot$ が存在して

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varepsilon_A} & K^0 \\
 & & \downarrow \varphi & \curvearrowright & \downarrow u^0 \\
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow[\varepsilon_B]{} & L^0
\end{array}$$

が可換になる．またこのような u はホモトピー同値を除き一意的である．

［証明］ (i)　u^0 の定義．射 $\varepsilon_B \circ \varphi : A \to L^0$ は L^0 が入射的であるので 2.1.3 より単射 $\varepsilon_A : A \to K^\cdot$ を経由して $\varepsilon_B \circ \varphi = u^0 \circ \varepsilon_A$ と分解する．これで $u^0 : K^0 \to L^0$ を定める．

(ii)　$u^0, \cdots, u^{i-1}$ まで定義されたとき，u^i を次のように定義する．$u^{i-1} : K^{i-1} \to L^{i-1}$ から自然に $\overline{u^{i-1}} : K^{i-1}/\operatorname{Ker} d_K^{i-1} \to L^{i-1}/\operatorname{Ker} d_L^{i-1}$ が導かれる．自然な単射 $\overline{d_K^{i-1}} : K^{i-1}/\operatorname{Ker} d_K^{i-1} \hookrightarrow K^i$, $\overline{d_L^{i-1}} : L^{i-1}/\operatorname{Ker} d_L^{i-1} \hookrightarrow L^i$ に対し，L^i は入射的であるから $\overline{d_L^{i-1}} \circ \overline{u^{i-1}}$ は $\overline{d_K^{i-1}}$ を経由して $\overline{d_L^{i-1}} \circ \overline{u^{i-1}} = u^i \circ \overline{d_K^{i-1}}$ と分解する．これで $u^i : K^i \to L^i$ を定める．

次に一意性を示す．$u, v : K^\cdot \to L^\cdot$ を条件をみたす射とする．$u \simeq_h v$ なる $h = \{h^i\}$ を構成する．

(iii)　h^0, h^1 の定義．$h^0 = 0$ とおく．可換性より $u^0 \circ \varepsilon_A = \varepsilon_B \circ \varphi = v^0 \circ \varepsilon_A$ したがって $(u^0 - v^0) \circ \varepsilon_A = 0$. 完全性より $u^0 - v^0|_{\operatorname{Ker} d_K^0} = 0$ となるので，$u^0 - v^0$ は自然な全射 $p^0 : K^0 \to K^0/\operatorname{Ker} d_K^0$ を経由して $u^0 - v^0 = g^1 \circ p^0$ と

分解する．この $g^1 : K^0/\mathrm{Ker}\, d_K^0 \to L^0$ と単射 $\overline{d_K^0} : K^0/\mathrm{Ker}\, d_K^0 \hookrightarrow K^1$ に対して L^0 は入射的であったので $g^1 = h^1 \circ \overline{d_K^0}$ と分解する．これで h^1 を定める．すると $u^0 - v^0 = h^1 \circ d_K^0$.

(iv)　$h^0, h^1, \cdots h^i$ まで定義されたとき h^{i+1} を次のように定義する．可換性により，$u^i \circ d_K^{i-1} = d_L^{i-1} \circ u^{i-1}$, $v^i \circ d_K^{i-1} = d_L^{i-1} \circ v^{i-1}$ だから，$(u^i - v^i) d_K^{i-1} = d_L^{i-1}(u^{i-1} - v^{i-1})$. 帰納法の仮定より $u^{i-1} - v^{i-1} = h^i \circ d_K^{i-1} + d_L^{i-2} \circ h^{i-1}$ であるから $(u^i - v^i) d_K^{i-1} = d_L^{i-1} \circ h^i \circ d_K^{i-1}$．ここで $\alpha^i := u^i - v^i - d_L^{i-1} \circ h^i$ とおくと $\alpha^i \circ d_K^{i-1} = 0$. よって，$\alpha^i$ は自然な全射 $p^i : K^i \to K^i/\mathrm{Ker}\, d_K^i$ を経由して $\alpha^i = g^{i+1} \circ p^i$ と分解．この $g^{i+1} : K^i/\mathrm{Ker}\, d_K^i \to L^i$ と単射 $\overline{d_K^i} : K^i/\mathrm{Ker}\, d_K^i \hookrightarrow K^{i+1}$ に対して L^i は入射的であったので，$g^{i+1} = h^{i+1} \circ \overline{d_K^i}$ と分解する．これで h^{i+1} を定める．すると $\alpha^i = h^{i+1} \circ d_K^i$ となるので，$u^i - v^i = h^{i+1} \circ d_K^i + d_L^{i-1} \circ h^i$.

系 2.1.17　任意の $A \in \mathcal{C}$ に対し A の 2 つの入射的分解 $K^\cdot, L^\cdot$ はホモトピー同値である．

［証明］2.1.16 により $1_A : A \to A$ に対し，$u : K^\cdot \to L^\cdot$ $v : L^\cdot \to K^\cdot$ が存在．また 1_A に対し $v \circ u, 1_{K^\cdot} : K^\cdot \to K^\cdot$ はともに 2.1.16 の条件をみたす射であるので一意性により $v \circ u \simeq_h 1_{K^\cdot}$．同様にして $u \circ v \simeq 1_{L^\cdot}$.

命題 2.1.18　圏 $\mathcal{C}$ での完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ と A, C の入射的分解 $K^\cdot, M^\cdot$ が与えられたとする．このとき B の入射的分解 $L^\cdot$ と $K(\mathcal{C})$ での射 u, v が存在して次が完全列の可換図式になる．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \varepsilon_A \downarrow & & \varepsilon_B \downarrow & & \varepsilon_C \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K^\cdot & \underset{u}{\longrightarrow} & L^\cdot & \underset{v}{\longrightarrow} & M^\cdot & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

[証明]　(i)　L^0, ε_B の構成．$L^0 := K^0 \oplus M^0$ とおく．単射 $f : A \to B$ と $\varepsilon_A : A \to K^0$ に対し K^0 は入射的であったから $\lambda^0 : B \to K^0$ が存在して $\varepsilon_A = \lambda^0 \circ f$ と分解する．$\varepsilon_B := (\lambda^0, \varepsilon_C \circ g) : B \to L^0$ と定義する．$u^0 : K^0 \to L^0$ を第一成分への単射 $v^0 : L^0 \to M^0$ を第二成分への射影とすると，図式：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & & & 0 & & \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \varepsilon_A \downarrow & & \varepsilon_B \downarrow & & \varepsilon_C \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K^0 & \underset{u_0}{\longrightarrow} & L^0 & \underset{u_1}{\longrightarrow} & M^0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

は可換で完全になる．Five Lemma により ε_B は単射になる．このとき $0 \to \operatorname{Coker} \varepsilon_A \to \operatorname{Coker} \varepsilon_B \to \operatorname{Coker} \varepsilon_C \to 0$ は完全列になることに注意．

(ii)　$L^0, \cdots, L^{i-1}, d_L^0, \cdots, d_L^{i-2}$ まで構成されているとして，L^i, d_L^{i-1} を構成する．このとき

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K^{i-1} & \longrightarrow & L^{i-1} & \longrightarrow & M^{i-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \ \swarrow 0 & & \downarrow p & & \downarrow \ \swarrow 0 & & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Coker} d_K^{i-2} & \xrightarrow{\overline{u^{i-1}}} & \operatorname{Coker} d_L^{i-2} & \xrightarrow{\overline{v^{i-1}}} & \operatorname{Coker} d_M^{i-2} & \longrightarrow & 0 \\ & \overline{d_K^{i-1}} \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \overline{d_M^{i-1}} & & & \\ & K^i & & K^i \oplus M^i & & M^i & & & \end{array}$$

は完全列の可換図式になる．$L^i := K^i \oplus M^i$ とおくと，K^i が入射的であるから $\lambda^i : \operatorname{Coker} d_L^{i-2} \to K^i$ が存在して $\overline{d_K^{i-1}} = \lambda^i \circ \overline{u^{i-1}}$．ここで $\overline{d_L^{i-1}} = (\lambda^i, \overline{d_M^i} \circ \overline{v^{i-1}}) : \operatorname{Coker} d_L^{i-2} \to L^i$ とおき，これと自然な射影 $p : L^{i-1} \to \operatorname{Coker} d_L^{i-2}$ との合成を $d_L^{i-1} : L^{i-1} \to L^i$ とすればよい．

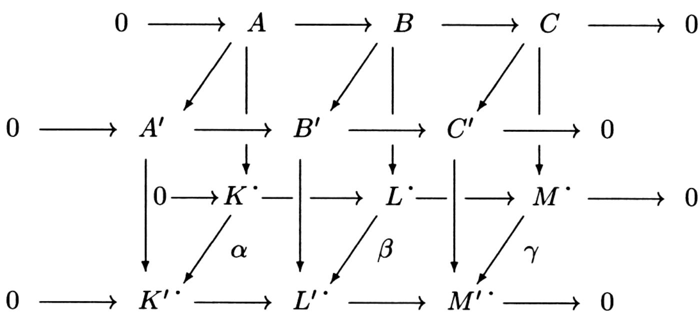
命題 2.1.19　圏 $\mathcal{C}$ における完全列の可換図式：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

と入射的分解の可換図式：

$$\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & A' \\
\downarrow & & \downarrow \\
K^{\cdot} & \xrightarrow{\alpha} & K'^{\cdot}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
C & \longrightarrow & C' \\
\downarrow & & \downarrow \\
M^{\cdot} & \xrightarrow{\gamma} & M'^{\cdot}
\end{array}$$

に対して B, B' の入射的分解 $L^{\cdot}, L'^{\cdot}$ が存在して



が可換になる.

［証明］ $L^{\cdot}, L'^{\cdot}$ を 2.1.18 の証明のように定め $\beta : L^{\cdot} \to L'^{\cdot}$ を $\alpha^i \oplus \gamma^i : K^i \oplus M^i \to K'^i \oplus M'^i$ と定義すれば良い.

2.2　i-次導来関手

この節でも圏 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ は 2.1と同様 (Ab), (Mod_R), ($\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}$) とする.

定義 2.2.1　加法的関手 $T^i : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ $(i \geq 0)$ の族 $T = (T^i)_{i \geq 0}$ が**コホモロジー関手** (cohomological functor) であるとは,

(i)　任意の完全列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ に対し $\partial^i : T^i(C) \to T^{i+1}(A)$

が存在して

$$\longrightarrow T^i(A) \xrightarrow{T^i(f)} T^i(B) \xrightarrow{T^i(g)} T^i(C) \xrightarrow{\partial^i} T^{i+1}(A) \xrightarrow{T^{i+1}(f)} \cdots$$

が完全列になり，

(ii)　完全列の可換図式：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha\downarrow & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

に対して

$$\begin{array}{ccc} T^i(C) & \xrightarrow{\partial^i} & T^{i+1}(A) \\ T^i(\gamma)\downarrow & & \downarrow T^i(\alpha) \\ T^i(C') & \xrightarrow[\partial^i]{} & T^{i+1}(A') \end{array}$$

が可換になるときをいう．

定義 2.2.2　$F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ を加法的関手とする．任意の対象 $A\in\mathcal{C}$ に対し入射的分解 $0\longrightarrow A\xrightarrow{\varepsilon} L^{\cdot}$ をとり $F(L^{\cdot})$ を $0\to F(L^0)\to F(L^1)\to F(L^2)\to\cdots$ なる複体とする．このとき $R^iF(A):=H^i\big(F(L^{\cdot})\big)$ と定義する．$\mathcal{C}$ の射 $f:A\to B$ に対しては，2.1.16 よりそれぞれの入射的分解の間の射 $u:L^{\cdot}\to K^{\cdot}$ が得られるので $R^iF(f):=H^i\big(F(u)\big)$ と定義する．これを F の i **次導来関手** (i-th derived functor) とよぶ．

次は i 次導来関手の重要な性質である．

定理 2.2.3　(i)　$R^iF(A)$ は A の入射的分解のとり方によらない．

(ii)　$RF:=(R^iF)_{i\geq 0}$ はコホモロジー関手になる．

(iii)　入射的対象 M に対して $R^iF(M)=0$ $(i>0)$.

(iv)　F が左完全であることと $R^0F\simeq F$ であることは同値．

(v)　条件 (ii) (iii) および $T^0 \cong R^0F$ をみたす関手の族 $T = (T^i)_{i\geq 0}$ は $T^i \cong R^iF$ $(i \geq 0)$ に限る．

［証明］ (i)　$K^\cdot, L^\cdot$ を A の 2 つの入射的分解とする 2.1.17 より射 $u : K^\cdot \to L^\cdot$ および $v : L^\cdot \to K^\cdot$ があって，$u \circ v \simeq_h 1_{L^\cdot}$, $v \circ u \simeq_{h'} 1_{K^\cdot}$. 各 i について $u^i \circ v^i - 1_{L^i} = h^{i+1} \circ d_L^i + d_L^{i-1} \circ h^i$ であるから加法的関手 F を施せば $F(u^i)F(v^i) - 1_{F(L^i)} = F(h^{i+1})F(d_L^i) + F(d_L^{i-1})F(h^i)$. よって $F(u) \circ F(v) \simeq_{F(h)} 1_{F(L^\cdot)}$. $F(v) \circ F(u) \simeq_{F(h')} 1_{F(K^\cdot)}$ も同様．したがって 2.1.14 より任意の i について $H^i\big(F(K^\cdot)\big) \simeq H^i\big(F(L^\cdot)\big)$.

(ii)　$\mathcal{C}$ の完全列：$0 \to A \to B \to C \to 0$ に対して 2.1.18 より A, B, C の入射的分解 $K^\cdot, L^\cdot, M^\cdot$ があって，完全列の図式

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K^\cdot & \longrightarrow & L^\cdot & \longrightarrow & M^\cdot & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

が可換になる．2.1.18 の証明より $L^i = K^i \oplus M^i$ として良いので加法的関手 F は $F(L^i) = F(K^i) \oplus F(M^i)$ をみたす．したがって $0 \to F(K^\cdot) \to F(L^\cdot) \to F(M^\cdot) \to 0$ は $K(\mathcal{C}')$ の完全列である．よって 2.1.10 より R^iF はコホモロジー関手であることがわかる．

(iii)　$M \in \mathcal{C}$ が入射的対象であるとする．すると $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} M \xrightarrow{d^0} 0 \xrightarrow{d^1} 0 \to$ は M の入射的分解となる．$R^iF(M) := H^i\big(0 \longrightarrow F(M) \xrightarrow{d^0} F(0) \xrightarrow{d^1} F(0) \cdots\big)$ で $F(0) = 0$ より $R^iF(M) = 0$ $(i > 0)$ となる．

(iv)　F が左完全なら $A \in \mathcal{C}$ の入射的分解 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} L^0 \xrightarrow{d^0} L^1$ に対し $0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\varepsilon)} F(L^0) \xrightarrow{F(d^0)} F(L^1)$ は完全列になる．定義より $R^0F(A) = \operatorname{Ker} F(d^0) \cong F(A)$. 逆に $R^0F \simeq F$ とする．$\mathcal{C}$ の完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ に対して RF はコホモロジー関手であったので，$0 \to R^0F(A) \to R^0F(B) \to R^0F(C)$ は完全列になるが，仮定よりこれは $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ な

る完全列なので F は左完全関手となる.

(v)　条件 (ii) (iii) をみたす $T=(T^i)_{i\geq 0}$, $S=(S^i)_{i\geq 0}$ と関手の射 $\varphi : T^0 \to S^0$ があったときに次の (a) (b) をみたす関手の射の族 $n=(n^i)_{i\geq 0} : T \to S$ が一意的に存在することを示せば十分：

(a)　$n^0 = \varphi$

(b)　圏 $\mathcal{C}$ での完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ に対し

$$\begin{array}{ccc} T^i(C) & \xrightarrow{\partial} & T^{i+1}(A) \\ {\scriptstyle n^i(C)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n^{i+1}(A)} \\ S^i(C) & \xrightarrow[\partial]{} & S^{i+1}(A) \end{array}$$

が可換になる.

$i=1$ のときに n^1 を構成しよう. $i>1$ についても同様. 任意の $A \in \mathcal{C}$ に対して $A \hookrightarrow M$ なる入射的対象 M をとり $0 \to A \to M \to B \to 0$ を完全列とすると次の完全列の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccccc} T^0(M) & \longrightarrow & T^0(B) & \xrightarrow{\partial} & T^1(A) & \longrightarrow & T^1(M)=0 \\ \downarrow{\scriptstyle n^0(M)} & & \downarrow{\scriptstyle n^0(B)} & & \downarrow & & \\ S^0(M) & \longrightarrow & S^0(B) & \xrightarrow[\partial']{} & S^1(A) & \longrightarrow & \end{array}$$

∂ が全射であることより $n^1_M(A) : T^1(A) \to S^1(A)$ が存在して $n^1_M(A) \circ \partial = \partial' \circ n^0(B)$. $n^1_M(A)$ が M のとり方によらないことを示せば, ∂ の全射性より n^1 の一意性は明らか. 今2つの入射的対象 M, N に単射 $A \hookrightarrow M$, $A \hookrightarrow N$ が存在したとする. このとき $M \oplus N$ も入射的対象となり自然な単射 $A \hookrightarrow M \oplus N$ が存在することより可換図式
$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & M \\ & \searrow & \downarrow \\ & & N \end{array}$$
があるときに $n^1_M(A) = n^1_N(A)$ を示せば十分.

$0 \to A \to M \to B \to 0$, $0 \to A \to N \to C \to 0$ を完全列とすると, 自然な射 $f : B \to C$ が存在し T, S がコホモロジー関手であることと n^1_M, n^1_N の定義より,

$$\begin{array}{ccc} T^0(B) & \xrightarrow{n^0(B)} & S^0(B) \\ {\scriptstyle T^0(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S^0(f)} \\ T^0(C) & \xrightarrow{n^0(C)} & S^0(C) \end{array}$$ の可換性から $$\begin{array}{ccc} T^1(A) & \xrightarrow{n^1_M(A)} & S^1(A) \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ T^1(A) & \xrightarrow[n^1_N(A)]{} & S^1(A) \end{array}$$

の可換性が導かれる.

2.3 Ext

この節では特に関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\ )$ の導来関手について調べよう．この節でも圏 $\mathcal{C}$ は 2.1と同様 (Ab), (Mod_R), $(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ とし，$\mathcal{C}^0$ は圏 $\mathcal{C}$ の双対圏を表す.まず入射的対象の双対である射影的対象を定義しよう.

定義 2.3.1 $X \in \mathcal{C}$ に対し，任意の $\mathcal{C}$ での完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ から導かれる列 $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C)$ は完全列であるが，$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \to 0$ が完全になる場合 X を**射影的対象** (projective object) とよぶ．$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(B, A)$ より $\mathcal{C}$ の射影的対象は $\mathcal{C}^0$ の入射的対象になることに注意.

命題 2.3.2 $\mathcal{C} =$ (Ab), (Mod_R) とすると任意の対象 $A \in \mathcal{C}$ に対し射影的対象 $L \in \mathcal{C}$ と全射 $L \to A$ が存在する．また $\mathcal{C} = (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ についてはこれは成立しない.

[証明] $\alpha \in A$ に対し $\mathcal{C} =$ (Ab) の場合は $L_\alpha = \mathbb{Z}$, $\mathcal{C} = (\mathrm{Mod}_R)$ の場合は $L_\alpha = R$, $L := \bigoplus_{\alpha \in A} L_\alpha$ とすれば良い.

$\mathcal{C} = (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ の主張については，たとえば $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{Z}_X$（恒等層，すなわち任意の開集合 $U \subset X$ に対して $\Gamma(U, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$) とすると，射影的 $\mathcal{O}_X$-加群は 0 のみであることからわかる．実際 $\mathcal{L}$ を射影的 $\mathcal{O}_X$-加群で 0 でないとする．するとある $x \in X$ が存在して $\mathcal{L}_x \neq 0$. したがって，ある $m \geq 0$ に対し零写像でない $\mathbb{Z}$-準同型 $\varphi_x : \mathcal{L}_x \to \mathbb{Z}/(m)$ が存在する．ここで x にのみ台をも

ち，茎が $\mathbb{Z}/(m)$ となる層を $\mathcal{G}$ と表すとこれは $\mathcal{O}_X$-加群となり，φ_x より $\mathcal{O}_X$-加群の射 $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{G}$ が得られる．作り方より，ある開集合 $x \in U \subset X$ があって $\Gamma(U, \mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi_U} \Gamma(U, \mathcal{G})$ は零写像ではない．ここで開集合 $V \subset X$ を $x \in V$, $U \not\subset V$ となるようにとり，層 $\mathbb{Z}_V$ を次のように定義する: 開集合 $W \subset X$ に対して，

$$\Gamma(W, \mathbb{Z}_V) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \ W \subset V \text{ のとき} \\ 0, \ W \not\subset V \text{ のとき}. \end{cases}$$

すると $\mathbb{Z}_V$ は $\mathcal{O}_X$-加群となり，自然な全射準同型 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m)$ により，全射 $\psi : \mathbb{Z}_V \to \mathcal{G}$ が得られる．ここで $\mathcal{L}$ が射影的であるので可換図式:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_V & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & \mathcal{G} \\ {\scriptstyle \exists_\mu}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle \varphi} \\ & \mathcal{L} & \end{array}$$

が得られる．これの U 上の切断の集合をとってみると

$$\begin{array}{ccc} 0 = \Gamma(U, \mathbb{Z}_V) & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & \Gamma(U, \mathcal{G}) \\ {\scriptstyle \mu_U}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle \varphi_U} \\ & \Gamma(U\mathcal{L}) & \end{array}$$

φ_U は零写像でなかったが，μ_U は零写像なので可換性に矛盾する．

定義 2.3.3　$A \in \mathcal{C}$ に対し，$L. \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0$ が**左分解** (left resolution) であるとは $L. = (L_i, d_i)$ が**チェイン複体** (chain complex) (つまり $L_i \xrightarrow{d_{i-1}} L_{i-1} \longrightarrow \cdots$ で，$d_{i-1} \circ d_i = 0$) であって $\longrightarrow L_2 \xrightarrow{d_1} L_1 \xrightarrow{d_0} L_0 \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0$ が完全列であることをいう．さらに各 L_i が射影的対象であるときに**射影的分解** (projective resolution) とよぶ．

命題 2.3.4　$\mathcal{C} = (\mathrm{Ab})$, (Mod_R) とすると任意の対象 $A \in \mathcal{C}$ は射影的分解を

もつ.

[証明] 2.3.2 により 2.1.12 と同様に証明される.

定義 2.3.5 $A \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, 入射的分解 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} L^0 \longrightarrow L^1 \cdots \longrightarrow L^n \longrightarrow 0$ が存在するとき $\mathrm{injdim}\, A \le n$ と定義する. また射影的分解 $0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to A \to 0$ が存在するとき $\mathrm{projdim}\, A \le n$ と定義する.

定義 2.3.6 対象 $A \in \mathcal{C}$ を固定すると, 関手 $F : \mathcal{C} \to (\mathrm{Ab})$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)$ は左完全共変関手となる. この i 次導来関手 $R^i F(Y)$ を $\mathrm{Ext}^i(A, Y)$ と表す. 特に $\mathcal{C} = (\mathrm{Mod}_R)$ の場合 $\mathrm{Ext}^i(A, Y)$ は R-加群の構造をもつ. これを $\mathrm{Ext}^i_R(A, Y)$ と表す.

命題 2.3.7 (i) $B \in \mathcal{C}$ が入射的対象のとき $\mathrm{Ext}^i(A, B) = 0$ $(i > 0)$.
(ii) $A \in \mathcal{C}$ が射影的対象のとき $\mathrm{Ext}^i(A, B) = 0$ $(i > 0)$.

[証明] (i) は導来関手の性質 2.2.3,(iii) より明らか. (ii) は B の入射的分解 $0 \to B \to L^{\cdot}$ に対して $\mathrm{Hom}(A, \ )$ を施すと, A が射影的であることより $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, L^0) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, L^1) \to \cdots$ は完全列になる. したがって $\mathrm{Ext}^i(A, B) = H^i\big(\mathrm{Hom}\,(A, L^{\cdot})\big) = 0$, $i > 0$.

命題 2.3.8 (i) $\big(\mathrm{Ext}^i(A, \ )\big)_{i \ge 0} : \mathcal{C} \to (\mathrm{Ab})$ は共変コホモロジー関手である.
(ii) $\big(\mathrm{Ext}^i(\ , B)\big)_{i \ge 0} : \mathcal{C}^0 \to (\mathrm{Ab})$ は共変コホモロジー関手である

[略証] (i) は導来関手の性質 2.2.3,(ii) より明らか.
(ii) は $\mathcal{C}^0$ での完全列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi^0} L \xrightarrow{\varphi^0} K \longrightarrow 0$ (すなわち $\mathcal{C}$ での完全列 $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$) に対して $\mathrm{Ext}^i(M, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(L, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(K, B) \xrightarrow{\partial^i} \mathrm{Ext}^{i+1}(M, B) \longrightarrow \cdots$ が完全列となるような $(\partial^i)_{i \ge 0}$ を構成し, 2.2.1 の (ii) が成立していることを示せば良い. $\mathcal{C}$ における B の入射的分解

$0 \to B \to Y^{\cdot}$ に対し，$Z^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*, Y^{\cdot}))$, $B^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*, Y^{\cdot}))$ をそれぞれ $Z^i(*)$, $B^i(*)$ と表すことにすると，各 i について $0 \to Z^i(M) \to Z^i(L) \to Z^i(K)$, および $B^i(L) \to B^i(K) \to 0$ が完全列となる．次の完全列の可換図式：

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \longrightarrow & & Z^i(M) & \longrightarrow & Z^i(L) & \longrightarrow & Z^i(K) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \longrightarrow & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Y^i) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, Y^i) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K, Y^i) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \longrightarrow & & Z^{i+1}(M) & \longrightarrow & Z^{i+1}(L) & \longrightarrow & Z^{i+1}(K) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & Z^{i+1}(M)/B^{i+1}(M) & \longrightarrow & Z^{i+1}(L)/B^{i+1}(L) & \longrightarrow & Z^{i+1}(K)/B^{i+1}(K) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

に Snake Lemma を適用すれば $0 \longrightarrow Z^i(M) \longrightarrow Z^i(L) \longrightarrow Z^i(K) \xrightarrow{\tilde{\partial}} Z^{i+1}(M)/B^{i+1}(M) \longrightarrow Z^{i+1}(L)/B^{i+1}(L) \longrightarrow Z^{i+1}(K)/B^{i+1}(K)$ が完全列となるような $\tilde{\partial}$ が存在する．$\tilde{\partial}|_{B^i(K)} = 0$ より $\tilde{\partial}$ は $\partial : Z^i(K)/B^i(K) \to Z^{i+1}(M)/B^{i+1}(M)$ を経由して分解し，

$$\begin{aligned}
&Z^i(M)/B^i(M) \longrightarrow Z^i(L)/B^i(L) \longrightarrow Z^i(K)/B^i(K) \\
&\xrightarrow{\partial} Z^{i+1}(M)/B^{i+1}(M) \longrightarrow Z^{i+1}(L)/B^{i+1}(L) \longrightarrow Z^{i+1}(K)/B^{i+1}(K)
\end{aligned}$$

が完全になる．

Ext^i はまた別な見方もできる．

定理 2.3.9　$\mathcal{C} = (\mathrm{Ab}), (\mathrm{Mod}_R)$ のとき関手 $\mathrm{Ext}^i(\ ,B) : \mathcal{C}^0 \to (\mathrm{Ab})$ は関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(B,\ ) : \mathcal{C}^0 \to (\mathrm{Ab})$ の i 次導来関手である．

［証明］ 2.3.7,(ii) より $\mathcal{C}^0$ の入射的対象 (すなわち $\mathcal{C}$ の射影的対象) A に対し

て $\mathrm{Ext}^i(A,B)=0,\ i>0$, また 2.3.8,(ii) と $\mathrm{Ext}^0(A,B)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(B,A)$ より 2.2.3,(v) を適用すれば $\mathrm{Ext}^i(\ ,B)\cong R^i\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(B,\ )$ が得られる.

系 2.3.10 $\mathcal{C}=(\mathrm{Ab}),(\mathrm{Mod}_R)$ のとき $A\in\mathcal{C}$ に対し A の射影的分解を $X_.\to A\to 0$ とすると, 任意の $B\in\mathcal{C}$ に対し $\mathrm{Ext}^i(A,B)=H^i\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_.,B)\big)$ が成立する.

[証明] $\mathcal{C}$ における A の射影的分解は $\mathcal{C}^0$ における A の入射的分解である. したがって 2.3.9 より $\mathrm{Ext}^i(A,B)\cong R^i\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(B,A)=H^i\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(B,X^{\cdot})\big)=H^i\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_.,B)\big)$.

定理 2.3.11(p) n を非負整数とすると $A\in\mathcal{C}$ について次は同値である：

(i) $\mathrm{projdim}\,A\le n$,

(ii) 任意の $B\in\mathcal{C}$ に対して $\mathrm{Ext}^{n+1}(A,B)=0$,

(iii) $\mathrm{Ext}^n(A,\ )$ は右完全関手

(iv) $0\to X_n\to X_{n-1}\to\cdots\to X_0\to A\to 0$ を $\mathcal{C}$ での完全列とする. $X_0,\cdots,X_{n-1}$ が射影的ならば X_n も射影的である

[証明] (i) ⇒ (ii) $0\to X_n\to X_{n-1}\to\cdots\to X_0\to A\to 0$ を射影的分解とする. 2.3.10 より $\mathrm{Ext}^{n+1}(A,B)=H^{n+1}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_.,B)\big)=0$.

(ii) ⇒ (iii) $0\to B'\to B\to B''\to 0$ を $\mathcal{C}$ での完全列とすると
$\mathrm{Ext}^n(A,B')\to\mathrm{Ext}^n(A,B)\to\mathrm{Ext}^n(A,B'')\to\mathrm{Ext}^{n+1}(A,B)=0$.

(iii) ⇒ (iv) $n=0$ のとき条件 (iii) は $\mathrm{Hom}\,(A,\ )$ が完全関手であることを意味するので A は射影的対象である. よって長さ 0 の左分解 $0\to X_0\to A\to 0$ に対し X_0 は射影的となる. $n>0$ としよう. $\mathcal{C}$ での完全列 $0\to B'\to B\to B''\to 0$ が与えられたときに $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n,B)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n,B'')$ が全射であることを示せば良い. ここで X_n の射影的分解 $\to X'_{n+1}\to X'_n\to X_n\to 0$ をとることにより, $\to X'_{n+1}\to X'_n\to X_{n-1}\to X_{n-2}\to\cdots\to A\to 0$ は A の射影的分解を与える.

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}^n(A,B) &= H\big(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{n-1},B)\to\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X'_n,B)\to\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X'_{n+1},B)\big)\\ &= H\big(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{n-1},B)\to\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n,B)\to\ 0\ \big)\end{aligned}$$

したがって $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{n-1},B)\to\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n,B)\to\operatorname{Ext}^n(A,B)\to 0$ は完全列. B'' についてもこの列をつくり完全列の可換図式：

$$\begin{array}{ccccccc}\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{n-1},B) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n,B) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^n(A,B) & \longrightarrow & 0\\ \alpha\big\downarrow & & \big\downarrow\beta & & \big\downarrow\gamma & & \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{n-1},B'') & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n,B'') & \longrightarrow & \operatorname{Ext}^n(A,B'') & \longrightarrow & 0\end{array}$$

を得る. ここで X_{n-1} が射影的だから α は全射で, 仮定 (iii) から γ は全射. よって β も全射となり X_n は射影的である.

(iv) ⇒ (i)　$X_{n-1}\xrightarrow{d_{n-2}}X_{n-2}\longrightarrow\cdots\longrightarrow X_0\longrightarrow A\longrightarrow 0$ を A の射影的分解とし, $X_n:=\operatorname{Ker}d_{n-2}$ とおくと (iv) よりこれは射影的. したがって長さ n の射影的分解 $0\to X_n\to\cdots\to X_0\to A\to 0$ が得られた.

系 2.3.12(p)　圏 $\mathcal{C}$ の対象 A が射影的であることと $\operatorname{Ext}^1(A,B)=0$ がすべての $B\in\mathcal{C}$ について成立することは同値である.

[証明]　2.3.11 (p) の (i), (ii) の同値性で $n=0$ としたものである.

定理 2.3.11(i)　n を非負整数とすると $B\in\mathcal{C}$ について次は同値である.

(i)　$\operatorname{injdim}B\le n$.

(ii)　任意の $A\in\mathcal{C}$ に対して $\operatorname{Ext}^{n+1}(A,B)=0$.

(iii)　$\operatorname{Ext}^n(\ ,B)$ は右完全関手.

(iv)　$0\to B\to Y^0\to\cdots\to Y^n\to 0$ を $\mathcal{C}$ での完全列とする. $Y_0,\cdots,Y^{n-1}$ が入射的ならば Y^n も入射的である.

系 2.3.12(i)　圏 $\mathcal{C}$ に対象 B が入射的であることと $\operatorname{Ext}^1(A,B)=0$ がすべての $A\in\mathcal{C}$ について成立することは同値である.

2.3.11 (i), 2.3.12 (i) 共に証明は 2.3.11 (p), 2.3.12 (p) と同様である.

2.4 層係数のコホモロジー

$(X, \mathcal{O}_X)$ を環つき空間とする. 前の節を利用して $(X, \mathcal{O}_X)$ 上の層を係数としてもつコホモロジーを導入しよう.

定義 2.4.1 集合 Φ が X の**台の族** (family of support) であるとは

(1) Φ は X の閉集合からなる空でない集合

(2) $F_1, F_2 \in \Phi$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \Phi$

(3) 閉集合 F' に対し $F' \subset F, F \in \Phi$ ならば, $F' \in \Phi$.

例 2.4.2 (i) $\Phi = \{X$ のすべての閉集合$\}$,

(ii) $\Phi = \{X$ のすべてのコンパクトな閉集合$\}$,

(iii) $F \subset X$ を閉集合として $\Phi = \{F$ に含まれるすべての閉集合$\}$ とすると, これらはすべて台の族になる.

命題 2.4.3 台の族 Φ と $\mathcal{F} \in (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ に対して

$$\Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}) := \{s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \mid \mathrm{supp}\,(s) \in \Phi\}$$

とし $(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ の射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対して $\Gamma_\Phi(\varphi) : \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}) \to \Gamma_\Phi(X, \mathcal{G})$ を $\varphi_X : \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G})$ の制限とすると $\Gamma_\Phi : (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}) \to (\mathrm{Ab})$ は左完全関手になる.

定義 2.4.4 左完全関手 $\Gamma_\Phi : (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}) \to (\mathrm{Ab})$ に対して, i 次導来関手 $R^i\Gamma_\Phi(X, \mathcal{F})$ を **Φ を台の族とする $\mathcal{F}$ の i 次コホモロジー**といい $H^i_\Phi(X, \mathcal{F})$ と表す. 特に Φ が例 2.4.2 の (i) (ii) (iii) のとき $H^i_\Phi(X, \mathcal{F})$ をそれぞれ $H^i(X, \mathcal{F})$, $H^i_c(X, \mathcal{F})$, $H^i_F(X, \mathcal{F})$ と表す.

i 次導来関手の性質 2.2.3 より次が得られる.

定理 2.4.5 (i) $\bigl(H^i_\Phi(X,\ )\bigr)_{i\geq 0}$ はコホモロジー関手である.
(ii) 入射的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ に対して $H^i_\Phi(X,\mathcal{F})=0$ $(i>0)$.
(iii) $H^0_\Phi(X,\mathcal{F})=\Gamma_\Phi(X,\mathcal{F})$

次のアフィン多様体のコホモロジーによる特徴づけは重要である.

定理 2.4.6 (Serre [Se2]) $(X,\mathcal{O}_X)$ を代数多様体とすると次は同値である:
(i) X はアフィン多様体である.
(ii) 任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対して $H^i(X,\mathcal{F})=0$ $(i>0)$.
(iii) 任意の連接的 $\mathcal{O}_X$-イデアル層 $\mathcal{I}$ に対して $H^1(X,\mathcal{I})=0$.

層係数のコホモロジー群 $H^i_\Phi(X,\mathcal{F})$ は定義からは仲々計算できないものであるが, 2.4.6 により代数多様体上の連接層 $\mathcal{F}$ については, **チェックコホモロジー** (Čech cohomology) として計算可能になる. 詳しくは [Se1].

定義 2.4.7 $\mathcal{F}\in(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ に対して $F:(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})\to(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$, $\mathcal{G}\mapsto\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ は左完全関手になる. この i 次導来関手 $R^iF(\mathcal{G})$ を $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ と表す.

$\mathcal{C}=(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ の場合に 2.3.10 にかわるものとして次が示される.

命題 2.4.8 擬射影的多様体 X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対し, 左分解 $\mathcal{L}.\to\mathcal{F}$ で各 $\mathcal{L}_i$ が有限階数の局所的自由層 (4.1 参照) になるものが存在する. さらに任意の $\mathcal{G}\in(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ に対して,

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})\simeq H^i\bigl(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}.,\mathcal{G})\bigr)$$

が成立する.

[証明] 十分豊富な可逆層 $\mathcal{H}$ に対し, $\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}$ は有限個の切断で生成されるので, 全射: $\mathcal{O}_X^{\oplus r}\to\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}$ が存在する. $\otimes\mathcal{H}^{-1}$ を施して, 全射 $(\mathcal{H}^{-1})^{\oplus r}\to\mathcal{F}$

を得る．$\mathcal{L}_0 = (\mathcal{H}^{-1})^{\oplus r}$ とすればよい．2.1.12 の証明と同様に順次 $\mathcal{L}_i$ $(i \geq 0)$ を得る．

後半の主張については，$\mathcal{L}_i$ の条件より $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_i,\ )$ は完全関手になるので，

$$T^i = H^i\big(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\cdot,\ )\big) : (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}) \to (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$$

とすると $(T^i)_{\geq 0}$ はコホモロジー関手になる．

また，$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\ ,\mathcal{G})$ は左完全関手だから，$T^0(\mathcal{G}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. さらに $\mathcal{G}$ が入射的であるとき，任意の開集合 U について $\mathcal{G}|_U \in (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{X|U}})$ が入射的であることが示されるので，$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\ ,\mathcal{G})$ が，完全関手になる．よって $\mathcal{G}$ が入射的ならば，$T^i(\mathcal{G}) = H^i\big(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\cdot,\mathcal{G})\big) = 0$. したがって 2.2.3,(v) により T^i は $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\ )$ の i-次導来関手と同型になる．

命題 2.4.9 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ が連接的 $\mathcal{O}_X$-加群の場合 $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ も連接的となり，アフィン開集合 U 上では

$$\Gamma\big(U,\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})\big) = \mathrm{Ext}^{\,i}_{\Gamma(U,\mathcal{O}_X)}\big(\Gamma(U,\mathcal{F}),\Gamma(U,\mathcal{G})\big)$$

が成立する．

［証明］ $\mathcal{F}$ は連接的であるから 2.4.8 により，分解 $\mathcal{L}_\cdot \to \mathcal{F}$ で各 $\mathcal{L}_i$ が有限階数の局所自由層になっているものが存在し，$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \simeq H^i\big(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\cdot,\mathcal{G})\big)$. ここで $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_i,\mathcal{G})$ は連接的であるから，1.4.5 より，$H^i\big(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_\cdot,\mathcal{G})\big)$ も連接的．次の主張には少し先の知識が必要である．アフィン開集合 U に対し，2.6.10 のスペクトル列を考える:

$$E_2^{p,q} = H^p\big(U,\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X|U}}(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|_U\big) \Longrightarrow E^{p+q} = \mathrm{Ext}^{\,p+q}_{\mathcal{O}_{X|U}}(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|_U).$$

ここで U はアフィン，$\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{X|U}}(\mathcal{F}|_U\ ,\mathcal{G}|_U\ )$ は連接的であるから，2.4.6 より $E_2^{p,q} = 0$ $\big(\forall p \neq 0\big)$. したがってこのスペクトル列は E_2-退化し，$E_2^{0,n} \simeq E^n$. ここで $0 \to \mathcal{G}|_U \to \mathcal{I}^\cdot$ を $\mathcal{G}|_U$ の入射的分解とすると $0 \to \Gamma(U,\mathcal{G}|_U) \to \Gamma(U,\mathcal{I}^\cdot)$ が $\Gamma(U,\mathcal{G}|_U)$ の入射的分解になることに注意して，

$$E^n = \mathrm{Ext}^{\,n}_{\mathcal{O}_{X|U}}(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|_U)$$

$$
\begin{aligned}
&= H^n\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X|U}}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{I}^{\cdot})\bigr)\\
&= H^n\bigl(\mathrm{Hom}_{\Gamma(U,\mathcal{O}_X)}(\Gamma(U,\mathcal{F}), \Gamma(U,\mathcal{I}^{\cdot}))\bigr)\\
&= \mathrm{Ext}^n_{\Gamma(U,\mathcal{O}_X)}\bigl(\Gamma(U,\mathcal{F}), \Gamma(U,\mathcal{G})\bigr).
\end{aligned}
$$

一方 $E_2^{0,n} = \Gamma\bigl(U, \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_{X|U}}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)\bigr)$ であったので求める同型を得る．

2.5　導来関手と双対性

2.1と同様に $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ を (Ab), (Mod_R), ($\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}$) とする．$K(\mathcal{C})$ の部分圏 $K^+(\mathcal{C})$, $K^-(\mathcal{C})$, $K^b(\mathcal{C})$ をそれぞれ下に有界な対象，上に有界な対象．上下に有界な対象からなるものと定義する．$K(\mathcal{C})$ を含めこれらを代表して $K^*(\mathcal{C})$ と表す．

定義 2.5.1　$K^{\cdot}, L^{\cdot} \in K(\mathcal{C})$ に対して射 $u : K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ が**擬同型** (quasi-isomorphic) であるとは，u から導かれるコホモロジーの射 $H^i(K^{\cdot}) \to H^i(L^{\cdot})$ がすべて同型であることをいう．Qis を $K(\mathcal{C})$ のすべての擬同型の集合とする．

命題 2.5.2　次のような圏 $D(\mathcal{C})$ と関手 $Q : K(\mathcal{C}) \to D(\mathcal{C})$ が一意的に存在する．この $D(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ の**導来圏** (derived category) とよぶ．

(i)　任意の $f \in \mathrm{Qis}$ に対し $Q(f)$ は同型になる．

(ii)　任意の関手 $F : K(\mathcal{C}) \to D'$ で任意の $f \in \mathrm{Qis}$ に対して $F(f)$ が同型となるようなものは，Q を経由して一意的に分解する．

$K^+(\mathcal{C})$, $K^-(\mathcal{C})$, $K^b(\mathcal{C})$ に対しても $D(\mathcal{C})$ と同様に導来圏 $D^+(\mathcal{C})$, $D^-(\mathcal{C})$, $D^b(\mathcal{C})$ が定義され，それぞれ一意的に存在することがわかっている ([Ha1, I, 3.1])．これらを代表して $D^*(\mathcal{C})$ と表す．

定義 2.5.3　関手 $F : K^*(\mathcal{C}) \to K(\mathcal{C}')$ が **∂-関手** (∂-functer) であるとは F が関手 $T : K^*(\mathcal{C}) \to K^*(\mathcal{C})$ (または $K(\mathcal{C}') \to K(\mathcal{C}')$), $T(X^{\cdot})^p = X^{p+1}$, $d_{T(X)} = -d_{X^{\cdot}}$ と可換になることである．関手 $F : D^*(\mathcal{C}) \to D(\mathcal{C}')$ に対しても同様に ∂ 関手が定義される．

定義 2.5.4　∂-関手 $F : K^*(\mathcal{C}) \to K(\mathcal{C}')$ に対し，∂-関手 $\mathbb{R}^*F : D^*(\mathcal{C}) \to D(\mathcal{C}')$ が F の**導来関手** (derived functor) であるとは関手の射 $\xi : Q \circ F \to \mathbb{R}^*F \circ Q$ が存在して次の性質がみたされることをいう：

任意の ∂-関手 $G : D^*(\mathcal{C}) \to D(\mathcal{C}')$ と関手の射 $\zeta : Q \circ F \to G \circ Q$ に対して，射 $\eta : \mathbb{R}^*F \to G$ が一意的に存在して $\zeta = (\eta \circ Q) \circ \xi$ と分解する．

$\mathbb{R}^{*i}F(X^{\cdot}) = H^i\big(\mathbb{R}^*F(X^{\cdot})\big)$ と定義する．$K^*(\mathcal{C}) = K(\mathcal{C}), K^+(\mathcal{C}), K^-(\mathcal{C}), K^b(\mathcal{C})$ のそれぞれの場合に $\mathbb{R}^*F$ は $\mathbb{R}F, \mathbb{R}^+F, \mathbb{R}^-F, \mathbb{R}^bF$ を表すが，単に $\mathbb{R}F$ と表すこともある．どのような時に導来関手が存在するのか次の定理が基本的である．

定理 2.5.5　([Ha1, I.5.1])　$\mathcal{C}, \mathcal{C}', K^*(\mathcal{C}), F$ を 2.5.4 のようにとる．

三角分割された (定義は [Ha1, I, §1]) 部分圏 $L \subset K^*(\mathcal{C})$ で次の性質をみたすものが存在するとする．

(1)　$K^*(\mathcal{C})$ のすべての対象 $X^{\cdot}$ に対し，ある $I^{\cdot} \in L$ が存在して擬同型 $X^{\cdot} \to I^{\cdot}$ がある．

(2)　$I^{\cdot} \in L$ が任意の i に対して $H^i(I^{\cdot}) = 0$ をみたせば，$FI^{\cdot}$ も同じ性質をもつ．

このとき F は導来関手 $\mathbb{R}^*F$ を持ち，任意の対象 $I^{\cdot} \in L$ に対して $\xi(I^{\cdot}) : Q \circ F(I^{\cdot}) \to \mathbb{R}^*F \circ Q(I^{\cdot})$ は同型になる．

この節の導来関手と 2.2 の i-次導来関手の間には次のような関係がある．

例 2.5.6　$F : K^+(\mathcal{C}) \to K(\mathcal{C}')$ が加法的関手 $F_0 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ から導かれたものとする．L として $\mathcal{C}$ の入射的対象からなる複体の部分圏をとると 2.5.5 の条件をみたす．よって，導来関手 $\mathbb{R}^+F$ が存在する．任意の $K^{\cdot} \in K(\mathcal{C})$ に対して $K^{\cdot}$ と擬同型の L の対象 $I^{\cdot}$ を $K^{\cdot}$ の**入射的分解** (injective resolution) とよぶ．2.5.5 より $D(\mathcal{C}')$ の中で $\mathbb{R}^+FK^{\cdot} \simeq FI^{\cdot}$, よって特に $\mathbb{R}^{+i}FK^{\cdot} \simeq H^i(FI^{\cdot})$. さらに F_0 が左完全関手で，$K^{\cdot} = K^0$ (0 次が K^0 で他の次数ではすべて 0 の複体) のとき $\mathbb{R}^{+i}FK^{\cdot} = H^i(FI^{\cdot}) = R^iF_0K^0$ (2.2 の i 次導来関手) となる．

ここで，$K^{\cdot}$ の入射的分解 $I^{\cdot}$ は K^0 の入射的分解になることに注意.

例 2.5.7　([Ha1, II §2])　$f: X \to Y$ が k 上の代数多様体の射とする $\mathcal{C} = (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$, $\mathcal{C}' = (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_Y})$ として ∂-関手 $F: K(\mathcal{C}) \to K(\mathcal{C}')$ を $f_*: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ から導かれたものとする．このとき L として柔軟な $\mathcal{O}_X$-加群からなる複体の部分圏とすれば 2.5.5 の条件をみたす．よって導来関手 $\mathbb{R}F_*$ が存在する．これを $\mathbb{R}f_*$ と表す．ここで $\mathcal{I}$ が**柔軟** (flabby) であるとは，開集合の組 $V \subset U$ に対し制限射 $\rho_V^U: \Gamma(U, \mathcal{I}) \to \Gamma(V, \mathcal{I})$ が全射になることである．入射的 $\mathcal{O}_X$-加群は柔軟である．$K^{\cdot} \subset K(\mathcal{C})$ に擬同型な L の対象 $I^{\cdot}$ を**柔軟分解** (flabby resolution) とよぶ．2.5.5 より $D(\mathcal{C}')$ の中で $\mathbb{R}F_* K^{\cdot} = f_* I^{\cdot}$, よって特に $\mathbb{R}^i f_* K^{\cdot} = H^i(f_* I^{\cdot})$. $K^{\cdot} = K^0$ のときに 2.5.6 と同様に $\mathbb{R}^i f_* K^{\cdot} = R^i f_* K^0$.

今，$Y = \{\text{一点}\}$ とすると，$\mathcal{C}' = (\mathrm{Mod}_k)$ となり $f_* = \Gamma$ となるので，導来関手 $\mathbb{R}\Gamma$ の存在も示される．また Γ_E (E は閉集合), についても同様に導来関手は存在する.

例 2.5.8　([Ha1, I, §6, II, §3])　$X^{\cdot} \in K(\mathcal{C})$, $Y^{\cdot} \in K^+(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}^{\cdot}(X^{\cdot}, Y^{\cdot}) \in K(\mathcal{C})$ を次のように定義する

$$\mathrm{Hom}^n(X^{\cdot}, Y^{\cdot}) = \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^p, Y^{p+n})$$

$$d^n = \prod \left(d_X^{p-1} + (-1)^{n+1} d_Y^{p+n} \right)$$

これにより双 ∂-関手

$$\mathrm{Hom}: K(\mathcal{C})^0 \times K^+(\mathcal{C}) \longrightarrow K(\mathrm{Ab})$$

が得られる．この導来関手は存在して $\mathbb{R}\mathrm{Hom}^{\cdot}: D(\mathcal{C})^0 \times D^+(\mathcal{C}) \to D(\mathrm{Ab})$ と表される.

特に $\mathcal{C} = (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ として $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^{\cdot}, \mathcal{G}^{\cdot})$ を同様に定義すると,

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}: K(\mathcal{C})^0 \times K^+(\mathcal{C}) \longrightarrow K(\mathcal{C})$$

が得られ，この導来関手

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om : D(\mathcal{C})^0 \times D^+(\mathcal{C}) \longrightarrow D(\mathcal{C})$$

も存在する.

2.5.9　(双対化複体 [Ha1, V, §2])　X を代数多様体, $\mathcal{C} = (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ とし, $D_c(\mathcal{C})$ を各コホモロジーが連接的になる複体からなる $D(\mathcal{C})$ の部分圏とする. $R^\cdot \in D_c^+(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ が X の**双対化複体** (dualizing complex) であるとは, 長さ有限の入射的分解を持ち, 関手 $D = \mathbb{R}\mathcal{H}om(\ ,R^\cdot) : D_c(\mathcal{C})^0 \to D_c(\mathcal{C})$ に対し自然な射 $\mathcal{F}^\cdot \to DD\mathcal{F}^\cdot$ が同型になるものである. 双対化複体は一意的ではない ([Ha1, V, 3.1]) が, **正規化された双対化複体** (normalized dualizaing complex) $D_X^\cdot$ が $D_c^+(\mathcal{C})$ 内の同型を除き一意的に定まる ([Ha1, V, §6]).

定理 2.5.10　(固有射に対する双対定理 [Ha1, VII, 3.4])　$f : X \to Y$ を代数多様体の固有射とする, $\mathcal{C} = (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$, $\mathcal{C}' = (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_Y})$ として $\mathbb{R}f_* : D_c(\mathcal{C}) \to D_c(\mathcal{C}')$, $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\ ,D_X^\cdot) : D_c(\mathcal{C}) \to D_c(\mathcal{C})$, $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\ ,D_Y^\cdot) : D_c(\mathcal{C}') \to D_c(\mathcal{C}')$, ${}^\forall\mathcal{F}^\cdot \in D_c(\mathcal{C})$ に対して次が成立：

$$\mathbb{R}f_*\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^\cdot, D_X^\cdot) \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathbb{R}f_*\mathcal{F}^\cdot, D_Y^\cdot)$$

ここで Cohen-Macaulay 多様体の定義をしよう.

定義 2.5.11　Noether 局所環 R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ の元 $f_1, \cdots, f_r$ が ***R*-正則列** (R-regular seguence) であるとは, すべての i $(1 \leq i \leq r)$ について f_i を掛ける R-準同型： $R/\sum_{j=1}^{i-1} f_jR \to R/\sum_{j=1}^{i-1} f_jR$ が単射であるときにいう. R-正則列の長さの最大値を $\operatorname{depth} R$ と書いて R の**深さ** (depth) とよぶ. 一般には $\operatorname{depth} R \leq \dim R$ という関係があるが, 特にこの等式が成立するときに R を **Cohen-Macaulay 環** であるという.

代数多様体, または解析空間 X が **Cohen-Macaulay 的** であるとは, 任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X,x}$ が Cohen-Macaulay 環になっているときにいう.

命題 2.5.12　n 次元代数多様体 X に対して次は同値である.

(i)　X は Cohen-Macaulay 的である

(ii) $D_X^{\cdot} \cong D_X^{-n}[n]$ (つまり $D_X^{\cdot}$ は $-n$ 次が D_X^{-n} で他の次数はすべて0なる複体)

またこのとき $D_X^{-n} \cong \omega_X$, ただし，ω_X は4.3で定義される標準層である．

命題 2.5.13 ([Gr, 3.10]) R を Noether 局所環，k をその剰余体とすると次は同値である：

(i) $\operatorname{depth} R > n$.

(ii) $\operatorname{Ext}_R^i(k, R) = 0, \forall i \leq n$.

(iii) $H_{\mathfrak{m}}^i(R) = 0, \forall i \leq n$.

これにより R が Cohen-Macaulay 環 $\Longleftrightarrow \operatorname{Ext}_R^i(k, R) = 0, i < \dim R \Longleftrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(R) = 0, i < \dim R$ が示される．

定理 2.5.14 ([Ha1, V, §6]) (局所双対定理) k 上の代数多様体 X の点 x における局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とする．

このとき任意の $M^{\cdot} \in D_c^+(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ に対して次が成立する

$$\mathbb{R}\Gamma_{\{x\}}(M^{\cdot}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}\left(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(M^{\cdot}, D_X^{\cdot}), I\right)$$

ここで I は $k = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}$ の**入射的閉包** (injective hull) すなわち I は入射的であって，k を $\mathcal{O}_{X,x}$-部分加群として含み I の任意の0でない $\mathcal{O}_{X,x}$-部分加群 N について $k \cap N \neq 0$ をみたす．

次の系がこの節の目的である．f が特異点解消のときにこの系はしばしば用いられる．

系 2.5.15 X を n 次元 Cohen-Macaulay 的代数多様体，$f : X \to Y$ を k 上代数多様体の固有射とする．$y \in Y$ に対し $E := f^{-1}(y)$ とし，$\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{Y,y}$ の入射的閉包を I とする．このとき X 上の任意の可逆層 (4.1.2 参照) $\mathcal{L}$ に対し，次が成立する．

$$H_E^i(X, \mathcal{L}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}\left(R^{n-i} f_*(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1}), I\right)$$

特に $X - E \xrightarrow{\sim} Y - \{y\}$ のとき $\dim_k H^i_E(X, \mathcal{L}) = \dim_k R^{n-i} f_*(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1})$.

[証明] 簡単のため $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y,y}}(M^{\boldsymbol{\cdot}}, I)$ を $(M^{\boldsymbol{\cdot}})'$ と表す.
$\Gamma_E = \Gamma_{\{x\}} \circ f_*$ であるから，$\mathbb{R}\Gamma_E \mathcal{L} \cong \mathbb{R}\Gamma_{\{x\}}\big(\mathbb{R}f_*(\mathcal{L})\big)$. 局所双対定理より右辺 $\cong \big(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathbb{R}f_*\mathcal{L}, D^{\boldsymbol{\cdot}}_Y)\big)'$. またこれは固有射に対する双対定理より $\big(\mathbb{R}f_*\big(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, D^{\boldsymbol{\cdot}}_X)\big)\big)'$ に同型. ここで $D^{\boldsymbol{\cdot}}_X = \omega_X[n]$ よりこれは $\big(\mathbb{R}f_*(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1}[n])\big)'$ になるので求める同型が得られる. $X \setminus E \simeq Y \setminus \{y\}$ のとき $\mathcal{M} = R^{n-i} f_*(\omega_X \otimes \mathcal{L}^{-1})$ は $\{y\}$ に台をもつ. 一般に $\{y\}$ に台をもつ $\mathcal{M}$ に対して $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{M}'$ を示せば良い. $\mathcal{M}$ が単純 $\mathcal{O}_{Y,y}$-加群のときは $\mathcal{M} \cong \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{Y,y}$ より単射 $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{Y,y} \hookrightarrow I$ があるので $\mathcal{M}' \neq 0$. したがって $1 = \dim_k \mathcal{M} \leq \dim_k \mathcal{M}'$. $n \geq 2$ として，$\dim \mathcal{M} = n-1$ のときまで $\dim_k \mathcal{M} \leq \dim_k \mathcal{M}'$ が成立しているとしよう. $\dim \mathcal{M} = n$ とすると，$\mathcal{M}$ は単純でないとしてよいので $\mathcal{O}_{Y,y}$-加群の完全列:

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_2 \longrightarrow 0$$

$\dim_k \mathcal{M}_1, \dim_k \mathcal{M}_2 < n$ が存在する. $(\quad)'$ は完全関手なので，完全列:

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'_2 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}'_1 \longrightarrow 0$$

を得る. よって

$$\begin{aligned}\dim_k \mathcal{M}' &= \dim_k \mathcal{M}'_1 + \dim_k \mathcal{M}'_2 \\ &\geq \dim_k \mathcal{M}_1 + \dim_k \mathcal{M}_2 = n\end{aligned}$$

これで $\dim_k \mathcal{M} \leq \dim_k \mathcal{M}'$ を得たが，$(\mathcal{M}')' \cong \mathcal{M}$ より，$\dim_k \mathcal{M} = \dim_k \mathcal{M}'$ が従う.

定理 2.5.16 (Serre の判定法 [Ma2, 23.8]) ネーター環 R が整閉であることと，次の 2 条件が成立することは同値である.

(R_1) $\mathrm{ht}\mathfrak{p} = 1$ なる任意の素イデアル $\mathfrak{p} \subset R$ に対して $A_{\mathfrak{p}}$ は正則局所環

(S_2) 任意の素イデアル $\mathfrak{p} \subset R$ に対して $\operatorname{depth} R_{\mathfrak{p}} \geq \min\{\mathrm{ht}\mathfrak{p}, 2\}$

系 2.5.17　2次元局所整域 R が整閉ならば，R は Cohen-Macaulay 環である．

［証明］ R の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とすると $\mathrm{ht}\,\mathfrak{m} = 2$. よって2.5.16より $\operatorname{depth} R = \operatorname{depth} R_{\mathfrak{m}} \geq 2 = \dim R$.

2.6　スペクトル列

2.1と同様に圏 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ は (Ab), (Mod_R), $(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ とする．

定義 2.6.1　E が $\mathcal{C}$ に値をもつ**スペクトル列** (spectral sequence) であるとは，整数 $r_0 \geq 0$ が存在して，$E = \{E_r^{p,q}, d_r^{p,q}, E^n, F \mid p, q, r, n \in \mathbb{Z},\ r \geq r_0\}$ なる組であって次をみたすものである．

(1)　$E_r^{p,q}, E^n \in \mathcal{C}$, ${}^\forall p, q, n,\ r \geq r_0$.

(2)　$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ が $\mathcal{C}$ に於ける射で $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$ ${}^\forall p, q, r \geq r_0$ をみたす．

(3)　$E_{r+1}^{p,q} \simeq H(E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1})$, ${}^\forall p, q, r \geq r_0$.

(4)　任意の p, q に対して k が存在し，$E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q}$ が任意の $r \geq k$ について成立する．これを $E_\infty^{p,q}$ と表す．

(5)　F は E^n の部分対象の降鎖列 $F : E^n \supset \cdots \supset F^p(E^n) \supset F^{p+1}(E^n) \supset \cdots \supset 0$ で，ある ℓ, m について $F^\ell(E^n) = E^n$, $F^m(E^n) = 0$ となっているもので任意の p, q に対して $E_\infty^{p,q} \cong Gr_F^p E^{p+q} = F^p(E^{p+q})/F^{p+1}(E^{p+q})$ をみたす．

このときスペクトル列 E を $E_{r_0}^{p,q} \Longrightarrow E^{p+q}$ と書く．特に (4) の k が任意の p, q について共通にとれるとき E は $\boldsymbol{E_k}$**-退化** (E_k-degenerate) しているという．

命題 2.6.2　スペクトル列 $E_{r_0}^{p,q} \Longrightarrow E^{p+q}$ が任意の $p < 0$, $q < 0$ に対して $E_2^{p,q} = 0$ をみたしているとき，次の完全列が存在する．

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow E^1 \longrightarrow E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{2,0} \longrightarrow E^2.$$

[証明] 仮定より任意の n に対して $p<0$ なら $E_\infty^{p,n-p}=E_2^{p,n-p}=0$ また $q<0$ なら $E_\infty^{n-q,q}=E_2^{n-q,q}=0$ より $E^n=F^0(E^n)\supset\cdots\supset F^{n+1}(E^n)=0$ であることがわかる．仮定より $r\geq 2$ に対して $d_r^{1-r,r-1}=0$, $d_r^{1,0}=0$ であるから $E_2^{1,0}=E_\infty^{1,0}\cong Gr_F^1E^1=F^1(E^1)$ となり，また $0\to F^1(E^1)\to E^1\to F^0(E^1)/F^1(E^1)\to 0$ が完全列なので $0\to E_2^{1,0}\to E^1\to E_\infty^{0,1}\to 0$ なる完全列を得る．一方 $d_r^{-r,r}=0$ $(r\geq 2)$, $d_r^{0,1}=0$ $(r\geq 3)$ より $0\longrightarrow E_\infty^{0,1}=E_3^{0,1}\longrightarrow E_2^{0,1}\xrightarrow{d_2^{0,1}}E_2^{2,0}$ が完全列となる．上とつなげて完全列 $0\longrightarrow E_2^{1,0}\longrightarrow E^1\longrightarrow E_2^{0,1}\xrightarrow{d_2^{0,1}}E_2^{2,0}$ を得る．さらに $d_r^{2-r,r-1}=0$ $(r\geq 3)$, $d_r^{2,0}=0$ $(r\geq 2)$ より $\operatorname{Coker}d_2^{0,1}=E_3^{2,0}=E_\infty^{2,0}=Gr_F^2E^2=F^2(E^2)\hookrightarrow E^2$ より，求める完全列となる．

命題 2.6.3 スペクトル列 $E_{r_0}^{p,q}\Longrightarrow E^{p+q}$ に対し次が成立する：

(i) $r\geq 2$ として，任意の $q\neq 0$ について $E_r^{p,q}=0$ とする．このとき任意の p に対し $E_r^{p,0}\cong E^p$ が成立．

(ii) $r\geq 2$ として，任意の $p\neq 0$ について $E_r^{p,q}=0$ とする．このとき任意の q に対し $E_r^{0,q}\cong E^q$ が成立．

[証明] (i), $s\geq r$ に対し仮定より $d_s^{p-s,s-1}=0$, $d_s^{p,0}=0$. よって $E_r^{p,0}=E_\infty^{p,0}$. 一方 $t\neq p$ なら $Gr_F^tE^p\cong E_\infty^{t,p-t}=0$ よって $F^p(E^p)=E^p$, $F^{p+1}(E^p)=0$. したがって，$E^p=Gr_F^pE^p\cong E_\infty^{p,0}=E_r^{p,0}$. (ii) も同様.

スペクトル列をつくる一つの典型的な手法を紹介しよう．フィルター付き複体から構成するものである．

定義 2.6.4 $(K^\cdot,F)$ が**フィルター付き複体** (filtered complex) であるとは $K^\cdot\in K(\mathcal{C})$ であって，部分複体の降鎖列 $F:K^\cdot\supset\cdots\supset F^i(K^\cdot)\supset F^{i+1}(K^\cdot)\supset\cdots\supset 0$ がある M,m に対して $F^M(K^\cdot)=K^\cdot$, $F^m(K^\cdot)=0$ をみたしていることをいう．商複体 $F^p(K^\cdot)/F^{p+1}(K^\cdot)$ を $Gr_F^pK^\cdot$ と表す．

定理 2.6.5　フィルター付き複体 $(K^\cdot, F)$ から自然にスペクトル列 $E_1^{p,q} = H^{p+q}(Gr_F^p K^\cdot) \Longrightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(K^\cdot)$ が定義される．

［略証］ 複体 $K^\cdot$ の境界作用素 $K^i \to K^{i+1}$ をすべて d で表す．

$$Z_r^{p,q} := d^{-1}\big(F^{p+r}(K^{p+q+1})\big) \cap F^p(K^{p+q})$$
$$B_r^{p,q} := dF^{1+p-r}(K^{p+q-1}) + F^{p+1}(K^{p+q})$$

とし，$E_r^{p,q} := Z_r^{p,q}/Z_r^{p,q} \cap B_r^{p,q}$ と定義する．$dZ_r^{p,q} \subset Z_r^{p+r,q-r+1}, d(Z_r^{p,q} \cap B_r^{p,q}) \subset Z_r^{p+r,q-r+1} \cap B_r^{p+r,q-r+1}$ により d から自然に $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ が導かれる．$E^n := H^n(K^\cdot)$ とおき，E^n 上のフィルター F は $K^\cdot$ のフィルター F から自然に導かれるものとすると，これらはスペクトル列の定義をみたしている．ここで $B_1^{p,q} \subset Z_1^{p,q}$ で $E_1^{p,q} = Z_1^{p,q}/B_1^{p,q} = H^{p+q}(Gr_F^p K^\cdot)$ となることに注意.

定義 2.6.6　フィルター付き複体 $(L^\cdot, G)$ が $(K^\cdot, F)$ の**フィルター付き入射的分解** (filtered injective resolution) であるとは，$u : (K^\cdot, F) \to (L^\cdot, G)$ なるフィルター付き複体の射 (すなわち $u(F^pK^i) \subset F^pL^i$ をみたす複体の射) があって u から導かれる射 $Gr_F^p K^\cdot \to Gr_F^p L^\cdot$ が $Gr_F^p K^\cdot$ の入射的分解を与えていることをいう.

このとき $u : K^\cdot \to L^\cdot$ 自身も $K^\cdot$ の入射的分解を与えることに注意しよう．実際 $0 \to A \to B \to C \to 0$ が $\mathcal{C}$ の完全列で A が入射的のとき,「B が入射的 $\Leftrightarrow$ C が入射的」より $Gr_F^p L^i$ の入射性から順次 F^pL^i ($^\forall p$) が入射的であることがしたがう．$K^\cdot \to L^\cdot$ が擬同型になることは，完全列の可換図式:

$$\begin{array}{ccccc}
H^{i-1}\big(Gr_F^p(K^\cdot)\big) & \to & H^i\big(F^{p+1}(K^\cdot)\big) & \to & H^i\big(F^p(K^\cdot)\big) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^{i-1}\big(Gr_F^p(L^\cdot)\big) & \to & H^i\big(F^{p+1}(L^\cdot)\big) & \to & H^i\big(F^p(L^\cdot)\big)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\to H^i\big(Gr_F^p(K^\cdot)\big) & \to & H^{i+1}\big(F^{p+1}(K^\cdot)\big) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\to H^i\big(Gr_F^p(L^\cdot)\big) & \to & H^{i+1}\big(F^{p+1}(L^\cdot)\big)
\end{array}$$

に対して，$F^m(K^\cdot) \cong F^m(L^\cdot) \cong 0$ ($^\exists m$), $H^j\big(Gr_F^p(K^\cdot)\big) \simeq H^j\big(Gr_F^p(L^\cdot)\big)$ ($^\forall j$) から，p について帰納的に $H^i(K^\cdot) \simeq H^i(L^\cdot)$ を得る．

定理 2.6.7 左完全関手 $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ と $\mathcal{C}$ 上のフィルター付き複体 $(K^\cdot, F)$ に対して，次のスペクトル列がある．

$$E_1^{p,q} = \mathbb{R}^{p+q}TGr_F^pK^\cdot \Longrightarrow E^{p+q} = \mathbb{R}^{p+q}TK^\cdot$$

[証明] $(L^\cdot, G)$ を $(K^\cdot F)$ のフィルター付き入射的分解とする．$\mathcal{C}'$ 上のフィルター付き複体 $(TL^\cdot, TG)$ について，定理 2.6.5 よりスペクトル列：

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(Gr_{TG}^pTL^\cdot) \Longrightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(TL^\cdot)$$

を得る．$L^\cdot$ が $K^\cdot$ の入射的分解であることから $H^{p+q}(TL^\cdot) = \mathbb{R}^{p+q}TK^\cdot$. 一方 $Gr_G^pL^\cdot$ が $Gr_F^pK^\cdot$ の入射的分解であることから $H^{p+q}(TGr_G^pL^\cdot) = \mathbb{R}^{p+q}TGr_F^pK^\cdot$. ここで，$0 \to G^{p+1}L^i \to G^pL^i \to Gr_G^pL^i \to 0$ は入射的対象の完全列だから $R^1TG^{p+1}L^i = 0$ よって $TGr_G^pL^\cdot = Gr_{TG}^pTL^\cdot$.

例 2.6.8 (Hodge のスペクトル列) $(X, \mathcal{O}_X)$ を $\mathbb{C}$ 上の非特異解析空間 (cf. 3.1.8) とする，X 上の局所的自由 $\mathcal{O}_X$-加群の複体：

$\Omega^\cdot : 0 \to \mathcal{O}_X \to \Omega_X^1 \to \Omega_X^2 \to \cdots$ を考える．

F を $\Omega^\cdot$ の **stupid filtration** とする．(一般に $K^\cdot$ の stupid filtration F とは $(F^pK^\cdot)^i = \begin{cases} K^i & i \geq p \\ 0 & i < p \end{cases}$ で定義される). すると $Gr_F^p\Omega_X^\cdot = \Omega_X^p[-p] = \{0 \to \cdots \to 0 \to \overset{p\,次}{\Omega_X^p} \to 0 \to \cdots\}$ となるので，$T = \Gamma$ とすると $\mathbb{R}^{p+q}\Gamma Gr_F^p\Omega_X^\cdot = \mathbb{R}^{p+q}\Gamma\Omega_X^p[-p] = H^q(X, \Omega_X^p)$.

一方 De Rham の定理より $\Omega_X^\cdot$ は X 上の定値層 $\mathbb{C}$ の右分解となっているので $\mathbb{C}$ と $\Omega_X^\cdot$ は擬同型 (ただし $\mathbb{C}$ は 0 次が $\mathbb{C}$ で他の次数では 0 なる複体とみなす). よって $\mathbb{R}^{p+q}\Gamma\Omega^\cdot = \mathbb{R}^{p+q}\Gamma\mathbb{C} = H^{p+q}(X, \mathbb{C})$. これにより Hodge のスペクトル列とよばれる

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega_X^p) \Longrightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

を得る．ここで特に X がコンパクトな Kähler 多様体のとき，これは E_1-退化する．実際調和積分論により $H^i(X,\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=i} H^q(X,\Omega_X^p)$ であることが知られている．([MK, Theorem 5.4])．よって $\dim_{\mathbb{C}} E^i = \sum_{p+q=i} \dim_{\mathbb{C}} E_1^{p,q}$.

一方，一般に

$$(1_{p,q}) \qquad \dim_{\mathbb{C}} E_1^{p,q} \geq \dim_{\mathbb{C}} E_2^{p,q} \geq \cdots \geq \dim_{\mathbb{C}} E_\infty^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} Gr_F^p E^{p+q}$$

により，$\dim E^i \leq \sum_{p+q=i} \dim_{\mathbb{C}} E_1^{p,q}$ であり，この等号が成立することと $p+q=i$ なる各 (p,q) について $(1_{p,q})$ のすべての等号が成立することと同値．よってこの場合，$(1_{p,q})$ の等号が成立しスペクトル列は E_1-退化．

例 2.6.9 (Leray のスペクトル列)　$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ を環つき空間の射とする．$\mathcal{F} \in (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ に対し $\mathcal{F}$ の入射的分解 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^\cdot$ をとる．複体 $f_*\mathcal{I}^\cdot$ に対して，フィルター F を次のように定義する．

$$(F^p f_*\mathcal{I}^\cdot)^i = \begin{cases} 0, & i > -p \\ \mathrm{Ker}\, d^{-p}, & i = -p \\ f_*\mathcal{I}^i, & i < -p \end{cases}.$$

フィルター付き複体 $(f_*\mathcal{I}^\cdot, F)$ と左完全関手 $g_*: (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_Y}) \to (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_Z})$ に対して，2.6.7 よりスペクトル列

$$E_1^{p,q} = \mathbb{R}^{p+q} g_* Gr_F^p f_*\mathcal{I}^\cdot \Longrightarrow E^{p+q} = \mathbb{R}^{p+q} g_*(f_*\mathcal{I}^\cdot)$$

が得られる．ここでフィルターの定義より，

$$H^i(Gr_F^p f_*\mathcal{I}^\cdot) = \begin{cases} 0, & i \neq -p \\ \mathrm{Ker}\, d^{-p}/\mathrm{Im}\, d^{-p-1}, & i = -p \end{cases}$$

となるので $\mathrm{Ker}\, d^{-p}/\mathrm{Im}\, d^{-p-1} = R^{-p} f_*\mathcal{F}$ になることに注意すれば，$E_1^{p,q} = R^{2p+q} g_*(R^{-p} f_*\mathcal{F})$. 一方各 i について $f_*\mathcal{I}^i$ が柔軟になるので 2.5.7 より $E^{p+q} = H^{p+q}\big(g_*(f_*\mathcal{I}^\cdot)\big) = H^{p+q}\big((g\circ f)_*\mathcal{I}^\cdot\big) = R^{p+q}(g\circ f)_*\mathcal{F}$. これにより上のスペクトル列は

$$E_1^{p,q} = R^{2p+q} g_*(R^{-p} f_*\mathcal{F}) \Longrightarrow E^{p+q} = R^{p+q}(g\circ f)_*\mathcal{F}$$

となる．ここで，$E_r^{p,q}$ を $E_{r+1}^{2p+q,-p}$ とおくことによって，このスペクトル列は

$$E_2^{p,q} = R^p g_*(R^q f_* \mathcal{F}) \Longrightarrow E^{p+q} = R^{p+q}(g \circ f)_* \mathcal{F}$$

になる．これを Leray のスペクトル列とよぶ．

上は 2 つの左完全関手 f_*, g_* に対してスペクトル列が定義されたが，同様に結合の定義される 2 つの左完全関手についてスペクトル列が定義される．たとえば次のようなものがある．

例 2.6.10 $(X, \mathcal{O}_X)$ を環つき空間とする．2 つの左完全関手: $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \ ) : (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}) \to (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$, $\Gamma(X, \ ) : (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}) \to (\mathrm{Ab})$ を考えよう．$\mathcal{G} \in (\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X})$ に対し，$\mathcal{G}$ の入射的分解 $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{I}^{\cdot}$ をとる．複体 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^{\cdot})$ に対して，フィルター F を次のように定義する:

$$F^p\big(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^{\cdot})\big) = \begin{cases} 0, & i > -p \\ \operatorname{Ker} d^{-p}, & i = -p \\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^i), & i < -p \end{cases}$$

フィルター付き複体 $\big(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^{\cdot}), F\big)$ と左完全関手 $\Gamma(X, \ )$ に対して 2.6.7 よりスペクトル列

$$\begin{aligned} E_1^{p,q} &= \mathbb{R}^{p+q}\Gamma\big(X, Gr_F^p \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^{\cdot})\big) \\ &\Longrightarrow E^{p+q} = \mathbb{R}^{p+q}\Gamma\big(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^{\cdot})\big) \end{aligned}$$

を得る．ここでフィルターの定義より

$$H^i\big(Gr_F^p \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^{\cdot})\big) = \begin{cases} 0, & i \neq -p \\ \operatorname{Ker} d^{-p} / \operatorname{Im} d^{-p-1}, & i = -p \end{cases}$$

となるので $\operatorname{Ker} d^{-p}/\operatorname{Im} d^{-p-1} = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^{-p}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ になることに注意すれば，$E_1^{p,q} = H^{2p+q}\big(X, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^{-p}(\mathcal{F}, \mathcal{G})\big)$. 一方各 i について $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^i)$ が入射的になることに注意すれば

$$E^{p+q} = H^{p+q}\big(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{I}^{\cdot})\big) = \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{p+q}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

2.6.9 と同様の添字のつけ換えをすれば次のスペクトル列が得られる:

$$E_2^{p,q} = H^p\big(X, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{F}, \mathcal{G})\big) \Longrightarrow E^{p+q} = \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{p+q}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

第 3 章　特異点の定義，代数化定理，特異点解消

あらゆることがまちがいの原因になりうる．
似た記号，乱暴な字，ゆうべのアルコール，先生の助言 .....

この章では解析空間または代数多様体上の特異点とは何かを定義し，解析空間の孤立特異点は代数多様体の特異点とみなすことができることを紹介する．また代数多様体の特異点は基礎体の標数が 0 の場合に特異点解消をもつという広中の定理を紹介する．本書では我々は複素数体 $\mathbb{C}$ 上の特異点に注目し，それを調べる時にそれ自身ではなく特異点を押し広げた解消の方を調べるという立場に立つのでこの定理は基本的である．

約束　1 章で定義したように解析多様体，代数多様体とは，ある種の環つき空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ であった．以後，特にことわりのない限り解析多様体，代数多様体は記号 X のみで $(X, \mathcal{O}_X)$ を代表させることにする．

また，代数多様体の基礎体 k は特にことわりのない限り，任意の代数閉体とする．

3.1　特異点の定義

特異点の定義をするためにまず接錐，接空間の定義をしよう．

定義 3.1.1　x を k 上の代数多様体上の一点，X を x のアフィン近傍とする．X は $\mathbb{A}_k^N$ の代数的集合であるが $\mathbb{A}_k^N$ の座標の変換により x を原点 0 とし，$I \subset k[X_1, \cdots, X_N]$ を X の定義イデアルとする．$k[X_1, \cdots, X_N]$ のイデアル

I^*, I^1 を次のように定義する.

$I^* :=$ I の各元の**先頭部分** (leading form) で生成されるイデアル

$I^1 :=$ I の各元の**線型部分** (linear form) で生成されるイデアル

I^* で定義される $\mathbb{A}_k^N$ の部分多様体を x における**接錐** (tangent cone) とよび C_x と表す. I^1 で定義される $\mathbb{A}_k^N$ の部分多様体を x における**接空間** (tangent space) とよび T_x と表す.

ここで f の**先頭部分** (leading part) とは, $f(X_1 \cdots X_N) = \sum_{i=r}^{s} f_i$, ($f_i$ は次数 i の斉次多項式, $f_r \neq 0$) と表わしたとき f_r のことであり, f の**線型部分** (linear part) とは f_1 のことである. $0 \in X$ より I の各元の先頭部分は少くとも一次以上. したがって線型部分があれば必ず先頭部分になるので $I^1 \subset I^*$.

定義 3.1.1′ x を $\mathbb{C}^N$ の解析空間上の一点とした時も同様に C_x, T_x は定義できる. ただしこの場合は, I の各元は原点のまわりで Taylor 展開しておく必要がある. 先頭部分, 線型部分というのはこの Taylor 級数における先頭部分, 線型部分である.

この定義より C_x, T_x はそれぞれ $\mathbb{C}^N$ の中のアフィン多様体になることに注意しておこう.

アフィン多様体 C_x, T_x はどのようなものだろうか.

補題 3.1.2 X をアフィン代数多様体または $\mathbb{C}^N$ の解析空間, x を X 上の一点とする. $\mathcal{O}_X$ を構造層, $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ を極大イデアルとする. すると接空間, 接錐について次が成立.

(i) ベクトル空間として, $T_x \cong \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$

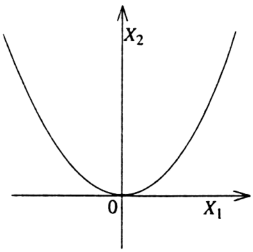
(ii) C_x のアフィン座標環 $A(C_x) \cong \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ となり C_x の x での次元は X の x での次元と等しい

これにより T_x, C_x は埋め込み $x = 0 \in X \subset \mathbb{A}_k^N$ のとり方によらず同型を除いて一意的に定まることがわかる.

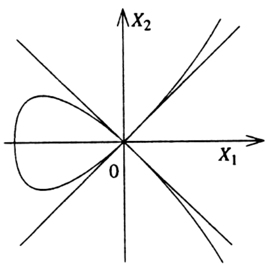
[証明]　(i)　$\mathbb{A}_k^N$ の原点 0 の定義イデアル $(X_1,\cdots,X_N)$ を M とすると $\mathrm{Hom}_k(k^N,k) \cong M/M^2$. ベクトル空間の単射 $T_x \hookrightarrow k^N$ の双対 $\mathrm{Hom}_k(k^N,k) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_k(T_x,k)$ の核はこの同型で $I^1/I^1 \cap M^2$ にうつる. $I^1+M^2 = I+M^2$ に注意すれば $\mathrm{Hom}_k(T_x,k) \cong (M/M^2)/(I^1/I^1\cap M^2) \cong M/(I^1+M^2) \cong M/(I+M^2) \cong \frac{M/I}{(M/I)^2} \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

(ii)　I^* は斉次イデアルだから $A(C_x) = k[X_1,\cdots,X_N]/I^* \cong (\bigoplus_{n\geq 0} M^n/M^{n+1}) / \bigoplus_{n\geq 0} (I^*\cap M^n/\ I^*\cap M^{n+1}) \cong \bigoplus_{n\geq 0} M^n/(I^*\cap M^n + M^{n+1})$. I^* の定義より $I^*\cap M^n+M^{n+1} = I\cap M^n+M^{n+1}$, よって $A(C_x) \cong \bigoplus_{n\geq 0} M^n/(I\cap M^n+M^{n+1}) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ 次元に関しては，まず次数つき環 $\bigoplus_{k\geq 0} \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ の極大イデアル $\bigoplus_{k\geq 1} \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ による局所化を A とし，その極大イデアルを $\mathcal{M}$ とすると $\mathcal{M}^k/\mathcal{M}^{k+1} \cong \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$. したがって $\dim_k \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}^k = \sum_{l=0}^{k-1} \dim \mathfrak{m}^l/\mathfrak{m}^{l+1} = \dim_k A/\mathcal{M}^k$. 次元定理 [A-M. Th. 11.14] を用いれば，$\dim \mathcal{O}_{X,x} = \big(\dim \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}^k\ (k \gg 0)$ を k の多項式とみたときの次数$\big) = \dim A$.

具体的な例で C_x, T_x をみてみよう.



例 3.1.3 の図



例 3.1.4 の図

例 3.1.3　$X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ の定義イデアル I を $(X_2 - X_1^2)$ とすると $I^* = (X_2)$, $I^1 = (X_2)$ となり $C_0 = T_0 =$(X_1-軸) となる.

例 3.1.4　$X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ の定義イデアル I を $((X_1+X_2)(X_1-X_2)+X_1^3)$ とすると $I^* = ((X_1+X_2)(X_1-X_2))$, $I^1 = (0)$ となる. したがって C_0 は $X_1+X_2=0$ と $X_1-X_2=0$ の 2 本の直線の和集合，T_0 は $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ 全体となる.

例 3.1.5　$X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ の定義イデアル I を $({X_2}^2 - {X_1}^3)$ とすると，$I^* = ({X_2}^2)$, $I^1 = (0)$ となる. したがって C_0 は 2 重の X_1-軸，T_0 は $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ 全体となる.

注意 3.1.6 超曲面の場合は，例でみたように常に I^* は I の生成元の先頭部分で生成されているが，一般にはこれは成立しない．

一方 I^1 については一般に生成元の線型部分で生成される．

また $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ は複素 2 次元だから実 4 次元であるので上記の絵は正しくはないのだが，実平面で切りとった絵と考えて頂きたい．

特異点の定義をするうえで次の定理は重要である．

定理 3.1.7 X を k 上の代数多様体または解析空間，x を X 上の一点とし，X の x での次元を n とする．$\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ を極大イデアルとする．このとき次が成立する．ただし解析空間の場合は以下の k を $\mathbb{C}$ と読みかえる．

(i) $C_x \subseteq T_x$,

(ii) $\dim T_x \geq n$,

(iii) $\mathfrak{m}$ の $\mathcal{O}_{X,x}$ 上の最小生成系の元の個数 $\geq n$,

(iv) $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq n$,

(v) $m := \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ としたとき

$$\varphi : k[X_1, \cdots, X_m] \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} \frac{\mathfrak{m}^k}{\mathfrak{m}^{k+1}}$$

なる次数付環の全射準同型が存在する，

(vi) $\Omega_{X,x}$ の $\mathcal{O}_{X,x}$ 上の最小生成系の元の個数 $\geq n$,

(vii) x の近傍 U に対し $U \subset \mathbb{A}^N_k$ とする．U が $f_1(X_1, \cdots, X_N)$, $\cdots$, $f_d(X_1, \cdots, X_N)$ で定義されているとする．すると，

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1}(x), & \frac{\partial f_2}{\partial X_1}(x) & \cdots\cdots & \frac{\partial f_d}{\partial X_1}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_N}(x) & & \cdots\cdots & \frac{\partial f_d}{\partial X_N}(x) \end{pmatrix} \leq N - n.$$

この左辺における行列を $U \subset \mathbb{A}^N_k$ の x における**ヤコビ行列** (Jacobian matrix) とよび $J(x)$ と表す．

(viii) 上の各主張 (i)〜(vii) において等号が成立することはそれぞれ同値であ

る．ただし (v) で等号成立ということは φ が同型になるということと約束する．

［証明］ (i)　$I^1 \subset I^*$ であったので $C_x \subseteq T_x$ は明らか．
(ii)　(i) より $\dim_x C_x \leq \dim_x T_x$ また 3.1.2 (ii) より左辺 $= n$ であった．
(iii)　$\dim_x X = n$ より，極大イデアル $\mathfrak{m}$ の高さは n, したがって生成元の個数はそれより大きくなければならない ([A-M, Cor. 11.16]).
(iv)　中山の補題により，$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ は $\mathfrak{m}$ の最小生成系の元の個数に等しいので (iii) より明らか．
(v)　次数つき環 $\bigoplus_{k\geq 0} \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ は次数 1 の部分 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ で生成されているから，$k[X_1, \cdots X_m]$ の X_i を各々 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の生成元に対応させることにより次数つき環の全射準同型が得られる．
(vi)　中山の補題より，$\dim_k \Omega_{X,x}/\mathfrak{m}\Omega_{X,x} \geq n$ を示せば十分であるが

$$\Omega_{X,x}/\mathfrak{m}\Omega_{X,x} \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2;\ \overline{df} \mapsto \overline{f - f(x)}$$

は k-ベクトル空間としての同型になるので，(iv) より従う．
(vii)　$x = (x_1, \cdots, x_N) \in U \subset \mathbb{A}_k^N$ とする．座標の平行移動で $x \mapsto 0$ とした時 U の定義イデアルは

$$I = (f_1(X_1 + x_1, \cdots X_N + x_N), \cdots, f_d(X_1 + x_1, \cdots X_N + x_N))$$

と表すことができる．ここで I^1 は，生成元の線型部分で生成されることに注意すれば，$f_i(X + x)$ の線型部分は，$\sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x)X_j$ となるので，

$$I^1 = \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial f_1}{\partial X_j}(x)X_j, \cdots, \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_d}{\partial X_j}(x)X_j \right)$$

となる．よって I^1 で定義される $\mathbb{A}_k^N$ の線型部分空間 T_x の次元は，3.1.2 (i) より m となり，

$$N - \mathrm{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial X_1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_N}(x) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial X_N}(x) \end{pmatrix}$$

に一致．(ii) よりこれは n 以上．

(viii) 次に等号成立の同値性を確かめよう．すでにみたように (ii) (iii) (iv) (vi) (vii) の不等式はすべて $m \geq n$ であるから，等号成立は同値．(i) については包含関係と 3.1.2 より $m \geq n$ となる．(i) が等号なら当然 $m = n$, 逆に $m = n$ なら T_x は既約なので (i) は等号になる．
(v) の全射性と 3.1.2 (ii) より $m \geq n$ となる．(v) が同型なら $m = n$. 逆に $m = n$ のとき，もし $\mathrm{Ker}\,\varphi \neq \{0\}$ なら Krull の主イデアル定理 [A-M Cor. 11.17] より $\bigoplus_{k\geq 0} \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ の次元 $< n$ となって矛盾．

定義 3.1.8 代数多様体または解析空間 X 上の点 x に対し定理3.1.7 の等号が成立している時，x は X の**なめらかな点** (smooth point) または**非特異点** (non-singular point) であるという．非特異でない点を**特異点** (singular point) とよぶ．$X_{\mathrm{sing}} = \{x \in X \mid x$ は X の特異点$\}$ とし，これを**特異点集合** (singular locus) とよぶ．それに対し非特異点の集合を X_{reg} と表す．特に $x \in X$ に対し，x の近傍 U が存在して $U_{\mathrm{sing}} = \{x\}$ の場合，x を X の**孤立特異点** (isolated singularity) とよぶ．また X 上のすべての点が非特異であるとき X は**非特異**であるという．

3.1.2 により特異点，非特異点の概念は埋め込み $X \subset \mathbb{A}^N_k$ のとり方によらないことがわかる．

定義より例 3.1.4, 3.1.5 はともに原点を特異点にもつ代数多様体である．また $\mathbb{A}^n_k$ は非特異代数多様体であることがわかる．

命題 3.1.9 代数多様体 (または解析空間) X が被約で既約のとき X_{sing} は X の代数的閉部分集合 (または解析的閉部分集合) で X_{reg} は X の稠密集合.

[証明] 各点 $x \in X_{\mathrm{sing}}$ の開近傍 U で特異点集合が代数的閉部分集合 (または解析的閉部分集合) になることを示せば良い．これは定理 3.1.7 (vii) より $U_{\mathrm{sing}} = \{y \in U \mid \left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(y)\right)$ のすべての $N-n$ 次小行列式 $=0\}$ となることから従う．第二の主張についてはたとえば [Ha, I. Th. 5.3] 参照.

定義 3.1.10 n 次元局所環 $\mathcal{O}$ とその極大イデアルが定理3.1.7 の (iii)～(v) で

等式をみたすとき，$\mathcal{O}$ は**正則** (regular) であるという．また $\mathcal{O}$ が整域であってその商体の中で整閉であるとき，$\mathcal{O}$ を**正規** (normal) とよぶ．代数多様体または解析空間 X の点 x が**正規点** (normal point) であるとは，$\mathcal{O}_{X,x}$ が正規環であるときにいう．またすべての点が正規点であるとき，X を**正規** (normal) であるという．

正規性に関しては次の事実が知られており，よく用いられる．

定理 3.1.11　(i)　正則局所環は正規である．したがって非特異多様体は，正規多様体である．逆は必ずしも正しくないが，次元が 1 の場合は正しい．
(ii)　代数多様体または解析空間 X の正規でない点の集合は，それぞれ代数的閉部分多様体または解析的閉部分空間になる．
(iii)　X を正規な代数多様体または正規解析空間とすると特異点集合の余次元は 2 以上．特に非特異な Y の上で一つの方程式で定義されている閉部分多様体については逆に $\operatorname{codim}_X X_{\mathrm{sing}} \geq 2$ なら X は正規になる．
(iv)　任意の被約で既約な代数多様体または解析空間 X は**正規化** (normalization) とよばれる次の全射 $\nu : \overline{X} \to X$ をもつ：
　(a)　$\overline{X}$ は正規な代数多様体または解析空間．
　(b)　$\mu : Y \to X$ を正規な Y からの全射とすると
　$g : Y \to \overline{X}$ が一意的に存在して $\mu = \nu \circ g$ となる．
(v)　X を代数多様体または解析空間 $U \subset X$ を $\operatorname{codim}_X(X \setminus U) \geq 2$ をみたす開集合とする．U が正規であるとき，次は同値である：
　(v-1)　X は正規．
　(v-2)　$\mathcal{O}_X = j_*\mathcal{O}_X|_U$, ただし $j : U \hookrightarrow X$ は包含写像．

［略証］ (i) は [Ma1 Th. 36, P.121](iii) は正規環 R の任意の素イデアル P による局所化 R_P はまた正規であるという性質から，特に P が高さ 1 の素イデアルの時 (i) の後半の主張から R_P は正則になる．(iv) は k 上有限生成環の整閉包はまた k 上有限生成であるという環論の結果 ([ZS, Vol.1, ChV, Th. 9, P.267) よりこれらの貼り合わせとして構成できる．このとき，$\nu : \overline{X} \to X$ は有限射となることに注意．(ii) は $x \in X$ が正規であることと $\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\nu^*} (\nu_*\mathcal{O}_{\overline{X}})_x$ が全射

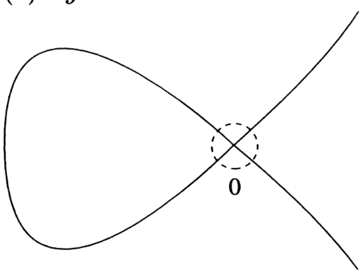
であることが同値であることに注意．ν は有限射だから，$\nu_*\mathcal{O}_{\overline{X}}$ は $\mathcal{O}_X$-連接層となりしたがって Coker φ も連接，よって台は代数的または解析的な閉集合．

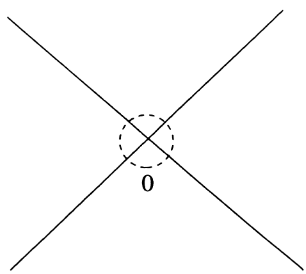
(v-1) $\Rightarrow$ (v-2): アフィン開集合 $V \subset X$ に対し $R = \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ は正規環だから $R = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}:\text{素イデアル} \\ ht\mathfrak{p}=1}} R_\mathfrak{p}$．一方 U の仮定より $\Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_X) \subset R_\mathfrak{p}$ が任意の $ht\mathfrak{p} = 1$ なる素イデアルに対していえる．したがって，$\Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_X) \subset \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$．逆の包含関係は明らか．(v-2) $\Rightarrow$ (v-1) は $\nu : \overline{X} \to X$ を正規化とすると $\nu_*\mathcal{O}_{\overline{X}}|_U = \mathcal{O}_X|_U$．よって $\nu_*\mathcal{O}_{\overline{X}} \subset j_*\mathcal{O}_X|_U = \mathcal{O}_X$．よって $\nu_*\mathcal{O}_{\overline{X}} = \mathcal{O}_X$ となり ν は同型．

3.2 代数化定理

この節では基礎体が $\mathbb{C}$ の場合を考える．前節で我々は特異点を定義したのであるが，一つの特異点に注目して考えよう．たとえば，

(1) $y^2 - x^2 - x^3 = 0$　　(2) $y^2 - x^2 = 0$





なる $\mathbb{C}$ 上の代数多様体は，もちろん異るものである．しかし原点のごく小さい近傍に制限してみると両方とも，$y = \pm x$ という 2 つの直線が交わってできているもののように見える．このような場合，同じ特異点とみなすことにしたい．これをこの節ではきちんと定義しよう．またこの節の主定理である代数化定理を用いれば

(3) $\sin(y - x)\sin(y + x) = 0$

はもちろん解析空間であって代数多様体ではないが，孤立特異点である原点の

十分小さい近傍に制限してみると代数多様体 (1), (2) の原点と同じとみなすことができるのである．

定義 3.2.1　任意の解析空間 X とその上の点 x との組 (X,x) の集合 $\mathcal{A}$ に次のように同値関係 $\sim$ を定義する．

$(X,x) \sim (Y,y) \iff x$ の近傍 $U \subset X$ と y の近傍 $V \subset Y$ そして，同型写像 $f : U \simeq V$ が存在し，$f(x) = y$ が成立．

次にこの同値関係 $\sim$ による商集合 $g := \mathcal{A}/\sim$ の元を**解析空間の芽** (germ of analytic space) とよび，その元を代表元 (X,x) を用いて表すことにする．

定義 3.2.2　R を Noether 局所環，$\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとするとき，$\widehat{R} := \varprojlim_{n\to\infty} R/\mathfrak{m}^n$ とおきこれを R の $\mathfrak{m}$ による**完備化** (completion) とよぶ (実際これは R の $\mathfrak{m}$-進位相に関して完備化になっているのであるが位相に関することはここではふれない)．

定理 3.2.3　(広中, Rossi [HR], Artin [A4]).　(X,x), (Y,y) を解析空間の芽とすると，次は同値：

(i)　$(X,x) = (Y,y)$

(ii)　$\mathbb{C}$-代数の同型　$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ が存在．

(iii)　$\mathbb{C}$-代数の同型　$\mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{O}_{Y,y}$ が存在．

［証明］ (i) と (ii) の同値性は，孤立特異点のときは [HR]，一般の場合は [A4, Cor. 1.6]．また (i) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (ii) は自明．

この節の冒頭の例 (1) (2) (3) はともに原点 0 において完備化をとると $\mathbb{C}[[x,y]]/(x+y)(x-y)$ となる．したがって，3.2.3 より原点での芽は一致する．

さて，X が $\mathbb{C}$ 上の代数多様体である場合を考えよう X 上には Zariski 位相のもとで代数多様体としての構造層 $\mathcal{O}_X^{\mathrm{alg}}$ が存在する．一方 $\mathbb{C}^N$ から導入され

た通常の位相のもとで，解析空間としての構造層 $\mathcal{O}_X^{\mathrm{hol}}$ も存在する．これにより，X は解析空間とも考えられる．

定理 3.2.4 (Artin の代数化定理). 解析空間の芽 (X, x) に対して，x が孤立特異点であるとき，$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 A とその上の点 P が存在し，

$$(X, x) = (A, P)$$

[証明] [A5, Theoren 3.8] により $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{hol}}_{X,x} \cong \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}_{A,P}$ なる複素代数多様体 A とその点 P が存在する．$\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{alg}}_{A,P} = \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{hol}}_{A,P}$ であるので定理 3.2.3 より $(X, x) = (A, P)$.

これにより解析空間の孤立特異点を扱うときは，代数多様体の孤立特異点と仮定して良いことがわかった．**以後，特にことわりのない限り孤立特異点** (X, x) **といった時，**X **は代数多様体，**$\mathcal{O}_X$ **は代数多様体の構造層とする．**

3.3 特異点解消と blow up

この節では代数閉体 k 上の代数多様体を考える．前半では k の標数が 0 の時に，特異点解消が存在するという広中の定理を紹介する．後半ではある種の特異点に対して具体的に解消を構成する方法を紹介する．

特異点解消の定義のためにいくつかの射の性質の定義を準備する．

定義 3.3.1 (1) 代数多様体の射 $f: Y \to X$ が**射影的** (projective) であるとは，閉部分多様体としての埋め込み $i: Y \hookrightarrow \mathbb{P}^N \times X$ が存在して $f = p_2 \circ i$ と分解することである．ただし $p_2 : \mathbb{P}^N \times X \to X$ は第二成分への射影.

(2) 代数多様体の射 $f: Y \to X$ が**局所射影的** (locally projective) であるとは X の開被覆 $\{U_i\}$ が存在して $f|_{f^{-1}(U_i)}$ が射影的であるときをいう．

(3) 代数多様体の射 $f: Y \to X$ が**固有射** (proper morphism) であるとは任意の射 $g: Z \to X$ に対して，射影 $p_2 : Y \times_X Z \to Z$ が閉写像になることであ

る．特に X を被約な1つの点として自明な射 $f: Y \to X$ が固有射であるとき，Y を**完備** (complete) であるという．

定義より，固有射はそれ自身閉写像になることがわかる．また局所射影的な射は，固有射であることが知られている．([Ha2, II,4] 参照)

定義 3.3.2　X を代数的整多様体とする (すると必然的に $X \setminus X_{\text{sing}}$ は X の稠密開集合になる). 代数多様体の射 $f: Y \to X$ が (あるいは単に Y が) X の**特異点解消** (resolution of singularities) であるとは，次の条件をみたすことである：

(1)　f は固有射である．

(2)　$f|_{Y \setminus f^{-1}(X_{\text{sing}})}: Y \setminus f^{-1}(X_{\text{sing}}) \to X \setminus X_{\text{sing}}$ が同型.

(3)　Y は非特異.

$f: Y \to X$ が**広義の特異点解消**であるとは上の (1) (3) と次の (2)′ が成立することである：

(2)′　f は Y, X の開集合上で同型になっている．

また $f: Y \to X$ が (あるいは単に Y が) X の特異点の**部分的解消** (partial resolution) であるとは上の (1), (2)′ と次の (4) が成立することである：

(4)　Y は正規.

定義 3.3.3　$f: Y \to X$ を部分的解消とし開集合 $X_0 \subset X$ に対し，制限射 $f|_{f^{-1}(X_0)}$ が同型であるとする．$Z \cap X_0 \neq \phi$ なる既約な閉部分集合 $Z \subset X$ に対して閉包 $Z' := \overline{f^{-1}(Z \cap X_0)}$ を Z の**狭義の逆像** (strict transform) とよぶ.

定理 3.3.4　(広中の特異点解消定理 [H] [AHV])　標数0の代数閉体 k 上の任意の代数的整多様体 X は次の性質をみたす局所射影的な特異点解消 $f: Y \to X$ を持つ：

(i)　$f^{-1}(X_{\text{sing}})$ は単純正規交差をもつ余次元1の閉集合.

(ii)　任意の自己同型写像 $\varphi: X \xrightarrow{\sim} X$ に対し，同型 $\widetilde{\varphi}: Y \xrightarrow{\sim} Y$ が存在して $f \circ \widetilde{\varphi} = \varphi \circ f$.

ただし，余次元1の閉集合 $E \subset Y$ が，**単純正規交差** (simple normal clossings)

をもつとは，E の各既約成分が非特異であって，各点 $x \in E$ で $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_{Y,x}$ の n 個の生成元 $f_1, \cdots, f_n$ の一部を用いて $f_{i_1} \cdots f_{i_k} = 0$ で E が定義されていることである，ただし $n = \dim X = \dim Y$.

標数が正の場合も定理 3.3.4 と同様のことが成立すると期待されており最近それを証明したと主張する数学者が現われている．しかし現在のところ，証明の正しさはまだ公には確認されていないようである．正しければ正標数の代数幾何，特異点理論が飛躍的に発展するであろうことを思うと是非成功してもらいたいものである．

さて，このように基礎体の標数 0 の場合に特異点解消の存在が証明されたので，$\mathbb{C}$ 上の代数多様体の特異点の性質を記述するのに特異点解消の言葉で記述することができる．それはまた 5 章以降で議論することにして，ここではいかにして与えられた特異点に対して具体的に解消を構成するかということを考えてみよう．最初に代数多様体のイデアルによる blow up を紹介する．広中の定理はこの操作によって解消を得る．与えられた勝手な特異点に対し特異点解消を具体的に求めることは容易ではないのであるが，特別な場合には 3.3.9～3.3.14 にみるように工夫によって得られることがある．

定義 3.3.5 (blow up) X をアフィン整多様体，I を X のアフィン環 $A(X)$ のイデアル，$g_0, \cdots, g_s$ を I の $A(X)$ 上の生成元とする．$U_i (i = 0, \cdots, s)$ を $A(X)$ の商体 $k(X)$ の部分環 $A(X)\left[\frac{g_0}{g_i}, \cdots \frac{g_s}{g_i}\right]$ をアフィン環にもつアフィン多様体とする． $U_{ij} = \{x \in U_i \mid g_j/g_i(x) \neq 0\}$ とおくと，$U_{ij} \simeq U_{ji}$ $(\forall_{i \neq j})$. この同型により，$\{U_i\}$ を貼り合わせてできる代数多様体を $B_I(X)$ と書く．各 i に対し代数多様体の射 $b_i : U_i \to X$ がアフィン環の自然な単射により定義され，それらは上記の貼り合わせと整合性を持つので，代数多様体の射 $b : B_I(X) \to X$ が自然に決まる．この b をあるいは $B_I(X)$ を **X の I による blow up** とよぶ．これは I の生成元 $g_0, \cdots, g_s$ のとり方によらず，X 上の同型を除いて一意的に決まる．

特に I が被約のとき，I の零点集合 $V(I)$ を用いて **V(I) を中心とする blow up** とよぶ．したがって点 $x \in X$ を中心とする blow up とは x を定義する極

大イデアル $M_x \subset A(X)$ による blow up のことである．これを特に $B_x(X)$ と書こう．

blow up に関して次の基本的な性質がある．

命題 3.3.6　X を k 上アフィン整多様体，$b: B_I(X) \to X$ をイデアル I による blow up とする．このとき次が成立する．

(i)　$B_I(X)$ もまた整多様体になる．

(ii)　b は射影的である．

(iii)　b の制限射 $b|_{B_I(X)\setminus f^{-1}(V)} : B_I(X) \setminus b^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} X \setminus V$ は同型である．ただし V は I で定義される閉部分多様体．

(iv)　$\mathrm{codim}_{B_I(X)} b^{-1}(V) = 1$

(v)　X を閉部分多様体 $X \subset Z$ として含むアフィン整多様体 Z をとる．対応するアフィン環の全射を $A(Z) \xrightarrow{\varphi} A(X)$ とし，$A(Z)$ のイデアル J で $\varphi(J) = I$ となっているものを任意にとる．このとき $\bar{b}: B_J(Z) \to Z$ を X の狭義の逆像に制限したものと $b: B_I(X) \to X$ は X 上同型である．

［略証］ (i)　blow up の定義より明らか．

(ii)　I の生成元を $g_0 \cdots g_s$ とすると

$$A(X)\left[\frac{g_0}{g_i}, \cdots, \frac{g_s}{g_i}\right] \longleftarrow\!\!\!\!\leftarrow A(X)\left[\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \frac{X_s}{X_i}\right] : \frac{g_j}{g_i} \leftarrow\!\!\!\shortmid \frac{X_j}{X_i}$$

なる全射により閉部分多様体としての埋め込み $U_i \hookrightarrow X \times W_i$ ($W_i \cong \mathbb{A}^s_k$) が得られる．$B_I(X)$ での $\{U_i\}$ の貼り合わせと $X \times \mathbb{P}^s_k$ での $\{X \times W_i\}$ の貼り合わせは整合性をもつので，全体として閉部分多様体の埋め込み $B_I(X) \hookrightarrow X \times \mathbb{P}^s$ が得られる．

(iii)　$X \setminus V(I)$ は $X \setminus V(g_i)$ で覆われるがこれらの逆像はそれぞれ $U_i - V(g_i)$ でアフィン環をみれば同型であることがわかる．

(iv)　$A(X)\left[\frac{g_0}{g_i}, \cdots, \frac{g_s}{g_i}\right]$ 上で $(g_0, \cdots, g_s) = (g_i)$．余次元については Krull の単項イデアル定理 [A-M Cor. 11.17]．

(v)　J の生成元を $\bar{g}_0, \cdots, \bar{g}_s$ その φ による像を $g_0, \cdots, g_s$ と書くと

$A(X)\left[\frac{g_0}{g_i},\cdots\frac{g_s}{g_i}\right] \longleftarrow A(Z)\left[\frac{\overline{g}_0}{\overline{g}_i},\cdots,\frac{\overline{g}_s}{\overline{g}_i}\right]$ なる自然な全射とこれらの貼り合わせとの整合性より閉埋め込み $B_I(X)\hookrightarrow B_J(Z)$ が得られる．この埋め込みはそれぞれの blow up $b, \overline{b}$ と整合性をもつ．$B_I(X)$ は整だから $\overline{b}^{-1}(X\setminus V)$ の閉包になる．

次の命題は命題 3.3.6 のある種の逆を与える．

命題 3.3.7 ([Ha2, II, 7.17]) Y, X ともに整多様体， X はアフィンとする．$\varphi: Y\to X$ を射影的であって，開集合上で同型になっているものとする．このとき，イデアル $I\subset A(X)$ が存在して，φ は $b: B_I(X)\to X$ と X 上同型になる．

次に一般の代数多様体の blow up をアフィン多様体の blow up の貼り合わせで定義する．

定義 3.3.8 X を任意の k 上の代数多様体，$\mathcal{I}\subset\mathcal{O}_X$ を $\mathcal{O}_X$-イデアル層とすると，X の $\mathcal{I}$ による blow up $b: B_{\mathcal{I}}(X)\to X$ を次のように定義する：X のアフィン被覆 $\{U_i\}$ に対し $I_i := \Gamma(U_i,\mathcal{I})$ とすると I_i は U_i のアフィン環のイデアル，それぞれの i に対し $b_i: B_{I_i}(U_i)\to U_i$ を構成すると同型 $b_i^{-1}(U_i\cap U_j)\overset{\varphi_{ij}}{\xrightarrow{\sim}} b_j^{-1}(U_i\cap U_j)$ が存在し，$b_j\circ\varphi_{ij}=b_i\ (\forall_{i\neq j})$．これらの同型 φ_{ij} によって貼り合わせた代数多様体を $B_{\mathcal{I}}(X)$ と書く．貼り合わせにおける写像 $\{b_i\}$ の整合性より $b: B_{\mathcal{I}}(X)\to X$ を得る．これを **X の $\mathcal{I}$ による blow up** とよぶ．

ここで $B_{\mathcal{I}}(X)\xrightarrow{b} X$ はアフィン被覆 $\{U_i\}$ のとり方によらないことに注意しておく．また b は，定義と 3.3.6,(ii) により局所射影的である．

例 3.3.9 ($\mathbb{A}_k^n$ の原点を中心とする blow up) アフィン空間 $\mathbb{A}_k^n$ の原点 0 中心の blow up $b: B_0(\mathbb{A}_k^n)\to\mathbb{A}_k^n$ を考える．0 の定義イデアルは $M=(X_1,\cdots,X_n)\subset k[X_1,\cdots,X_n]$ だから，各 U_i $(i=1,\cdots,n)$ のアフィン環は $k\left[X_i,\frac{X_1}{X_i},\cdots,\frac{X_n}{X_i}\right]$ となりこれは n 変数の多項式環と同型だから $U_i\cong\mathbb{A}_k^n$ $(i=1,\cdots,n)$．したがっ

てもちろん $B_0(\mathbb{A}_k^n)$ は非特異である．3.3.6 (iv) の証明で見たように $b^{-1}(0)$ は各 U_i では $X_i = 0$ で定義されるので $U_i \cap b^{-1}(0)$ のアフィン環は，$k\left[\frac{X_1}{X_i}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}\right]$ これらの貼り合わせをみると，$\mathbb{P}^{n-1}$ の貼り合わせと同じものである．よって $b^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^{n-1}$.

例 3.3.10　($\mathbb{A}_k^n$ の超曲面の原点 blow up)　$X \subset \mathbb{A}_k^n$ を既約多項式 $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ で定義される閉部分多様体とする (このように一個の多項式で定義されるものを次元にかかわらず**超曲面** (hypersurface) とよぶ) $0 \in X$ として原点 0 を中心とする blow up $B_0(X)$ を計算してみよう．まず $\mathbb{A}_k^n$ の blow up $\overline{b} : B_0(\mathbb{A}_k^n) \to \mathbb{A}_k^n$ で X の逆像 $\overline{b}^{-1}(X)$ をみてみよう．X は f で定義されているので逆像の定義より $\overline{b}^{-1}(X)$ も $B_0(\mathbb{A}_k^n)$ の中で f で定義されている．f は $k[X_1, \cdots, X_n]$ 上では既約であるが，U_i のアフィン環 $k\left[X_i, \frac{X_1}{X_i}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}\right]$ 上では $f(X_1, \cdots, X_n) = f\left(X_i\frac{X_1}{X_i}, \cdots, X_i, \cdots, X_i\frac{X_n}{X_i}\right) = X_i^m g_i\left(\frac{X_1}{X_i}, \cdots, X_i, \cdots, \frac{X_n}{X_i}\right)$ ($m > 0$, g_i は n 変数既約多項式) と分解される．U_i 上 $\overline{b}^{-1}(X)$ は $V(X_i^m)$ と $V(g_i)$ の和集合になるが，$V(X_i^m) \subset \overline{b}^{-1}(0)$ $V(g_i) \not\subset \overline{b}^{-1}(0)$ である ので 3.3.6 (v) より $V(g_i)$ が U_i 上で $B_0(X)$ を与える．次に $\overline{b}^{-1}(0) \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$ の中で $b : B_0(X) \to X$ による 0 の逆像 $b^{-1}(0)$ がどのようになっているか見よう．$\overline{b}^{-1}(0) \cap U_i \cong \mathbb{A}_k^{n-1}$ の中で $b^{-1}(0)$ は $g_i\left(\frac{X_1}{X_i}, \cdots, 0, \cdots, \frac{X_n}{X_i}\right)$ で定義される．ここで f の先頭部分を g とすると，任意の i に対し，$g\left(\frac{X_1}{X_i}, \cdots, 1, \cdots, \frac{X_n}{X_i}\right) = g_i\left(\frac{X_1}{X_i}, \cdots, 0, \cdots, \frac{X_n}{X_i}\right)$. よって，$b^{-1}(0)$ は $\overline{b}^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ の中で斉次多項式 g で定義される超曲面である．

例 3.3.11　(A_1-特異点)　$X \subset \mathbb{A}_k^3$ を多項式 ${X_1}^2 + {X_2}^2 + {X_3}^2$ で定義される超曲面とする．3.1.7 (vii) より X は原点 0 で孤立特異点を持っていることがわかる．0 での blow up　$b : B_0(X) \to X$ を計算してみよう．$B_0(\mathbb{A}_k^3)$ のアフィン被覆 $U_i (i = 1, 2, 3)$ 上で f は，$X_1^2\left(1 + \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{X_3}{X_1}\right)^2\right)$, $X_2^2\left(\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^2 + 1 + \left(\frac{X_3}{X_2}\right)^2\right)$, $X_3^2\left(\left(\frac{X_1}{X_3}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{X_3}\right)^2 + 1\right)$ とそれぞれ分解される．よって $B_0(X)$ は $U_i \cong \mathbb{A}_k^3$ の中では，$1 + Y_1^2 + Y_2^2$ で定義される (ただし Y_i は $\mathbb{A}_k^3$ の座標) 超曲面と同型．よって非特異になる．$b^{-1}(0)$ は $\overline{b}^{-1}(0) \cong \mathbb{P}_k^2$ の中で $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ で定義さ

れる超曲面でこれは $\mathbb{P}_k^1$ と同型になることが知られている．これで A_1-特異点の解消が得られた．他の Du Val 特異点については，このような点を中心とする blow up を何回かくり返すことにより特異点解消が得られる．((6.5) 参照).)
このように有限個の点の blow up で解消されるような特異点を**絶対孤立特異点** (absolutely isolated singularity) とよぶ．

例 3.3.12 （単純楕円型特異点） $\widetilde{E}_6$ 特異点 $x^3+y^3+z^3+\lambda xyz=0$ を $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ の原点で blow up すると，それが特異点解消になっていることがわかる．$\widetilde{E}_7$ 特異点ではどうであろうか．$X \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ を $x^4+y^4+z^2+\lambda xyz=0$ で定義されているとする．簡単のために $\lambda=0$ として計算してみよう．原点の blow up $b: B_0(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3) \to \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ の各アフィン環とその上での $B_0(X)$ の定義式は以下のようになる．

$$\mathbb{C}\left[x, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right] : x^2 + x^2\left(\frac{y}{x}\right)^4 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 \qquad \cdots (1)$$

$$\mathbb{C}\left[y, \frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right] : y^2\left(\frac{x}{y}\right)^4 + y^2 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 \qquad \cdots (2)$$

$$\mathbb{C}\left[z, \frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right] : z^2\left(\frac{x}{z}\right)^2 + z^2\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1 \qquad \cdots (3)$$

(3) は非特異であることがわかる．(1) は $x=\frac{z}{x}=0$ でまた (2) は $y=\frac{z}{y}=0$ で特異点をもつ．ともに特異点集合は $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ となり $B_0(X)$ の中で貼り合わされて $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ となる．したがって有限回の点の blow ups によっては決して解消は得られない．$\widetilde{E}_8$ についても同様のことがみられる．しかし次の定理により正規化を適宜用いれば解消が得られる．

定理 3.3.13 (Zariski [Z]) k を標数 0 の代数閉体とする．X を次元 2 の被約な k 上代数多様体とする．次のような射の列 $X_r \xrightarrow{\varphi_r} X_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X$ が存在する：

(i) 各 φ_i は正規化または X_{i-1} 上の孤立特異点の blow up である．

(ii) X_r は非特異．

例 3.3.14　$\widetilde{E}_7$ が原点の blow up で解消されないことは，例 3.3.12 で見たが，これはイデアル $I=(x^2,xy,y^2,z)$ による blow up　$b: B_I(\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ によって解消が得られる．実際 $B_I(\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}})$ の各アフィン座標環とその上での $B_I(X)$ の定義式は以下のとおりである．

$$\mathbb{C}\left[x,\frac{y}{x},\frac{z}{x^2}\right] \quad ; \quad 1+\left(\frac{y}{x}\right)^4+\left(\frac{z}{x^2}\right)^2 \qquad \cdots(1)$$

$$\mathbb{C}\left[x,\frac{y}{x},\frac{z}{xy}\right]_{\frac{y}{x}} \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{xy}\right)^2 \qquad \cdots(2)$$

$$\mathbb{C}\left[y,\frac{x}{y},\frac{z}{y^2}\right] \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^4+1+\left(\frac{z}{y^2}\right)^2 \qquad \cdots(3)$$

$$\mathbb{C}\left[x,y,z,\frac{x^2}{z},\frac{xy}{z},\frac{y^2}{z}\right] \cong \frac{\mathbb{C}[x,y,z,u,v,w]}{(x^2-zu,\ xy-zv,\ y^2-zw,\ v^2-uw,\ vy-wx,\ uy-vx)};$$

$$u^2+w^2+1 \qquad \cdots(4)$$

アフィン環を見れば (1)(3) のアフィン開集合は $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ と同型．(2) は $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}\setminus$ (1 つの座標平面) となっているのでその上のそれぞれの定義式を見れば，$B_I(X)$ が非特異になっていることがすぐわかる．(4) については $\mathbb{A}^6_{\mathbb{C}}$ の中の $B_I(X)$ のヤコビ行列 J を計算してみる必要がある．

$$J=\begin{pmatrix} 2x & y & 0 & 0 & -w & -v & 0 \\ 0 & x & 2y & 0 & v & u & 0 \\ -u & -v & -w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z & 0 & 0 & -w & 0 & y & 2u \\ 0 & -z & 0 & 2v & y & -x & 0 \\ 0 & 0 & -z & -u & -x & 0 & 2w \end{pmatrix} \text{の階級が} < 4$$

となる $B_I(X)$ の点が特異点である．特異点は $z=0$ 上（したがって $x=y=0$ 上）にあることがわかっているので，次の J_0 の階数 <4 なるところを探せばよい．

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -w & -v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v & u & 0 \\ -u & -v & -w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w & 0 & 0 & 2u \\ 0 & 0 & 0 & 2v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u & 0 & 0 & 2w \end{pmatrix}$$

ここで $w \neq 0$ とすると $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -w & 0 \\ -w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w & 0 & 2u \\ 0 & -u & 0 & 2w \end{pmatrix}$ なる小行列があるので，

$u \neq w$ なら $\operatorname{rank} J_0 = 4$ となる． $u^2 = w^2$ なら $v^2 = uw$ より $v \neq 0$ となり $\operatorname{rank} J_0 = 4$ は簡単にわかる． $u \neq 0$ としても同様．よって $\operatorname{rank} J_0 < 4$ となるのは $u = v = w = 0$ しかしこのような点は $u^2 + w^2 + 1 = 0$ を満たさないので $B_I(X)$ 上には存在しない．

3.4 特異点のトーリック解消

トーリック多様体とはトーラス $(k^*)^n$ の概等質空間 (3.4.4 参照) となっている代数多様体のことであるが，その構造は軌道の組み合わせ方も込めて，実ユークリッド空間の有限扇という図形 (の集合) で完全に記述される．この多様体は $(k^*)^n$ の 1 つの軌道を稠密開集合として持つので当然有理多様体 (函数体が k 上の有理函数体になる整多様体) という特殊な多様体であるが，この圏は色々なことができる“良い圏”なのである．k の標数にかかわらず特異点解消が存在するというのも美点の一つである．この美点は切ったもの (超曲面切断 0.1 参照) にも受けつがれる (3.4.23 参照)．

ここでは k は常に任意標数の代数閉体とする．

まず一般の代数群とその作用に関する準備をしよう．

定義 3.4.1　k 上の代数的整多様体 G が代数群であるとは次の 3 条件が成立することである．

(1)　$\mu : G \times G \to G$ なる k 上代数多様体の射が存在し，$\mu(\mu(g_1, g_2), g_3) = \mu(g_1, \mu(g_2, g_3))$ をみたす．

(2)　$e \in G$ が存在し，任意の $g \in G$ に対して $\mu(g, e) = \mu(e, g) = g$ となる．

(3)　$\beta : G \xrightarrow{\sim} G$ なる k 上の自己同型が存在し $\mu(\beta(g), g) = \mu(g, \beta(g)) = e$ が任意の $g \in G$ について成立する．

例 3.4.2　(i)　$\mathbb{A}_k^1$ は $\mu : \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_k^1 \to \mathbb{A}_k^1 : (a, b) \mapsto a + b$ により可換な代数群となる．

(ii)　$T_k^1 = \mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}$ として $\mu : T_k^1 \times T_k^1 \to T_k^1 : (a, b) \mapsto a \cdot b$ とすると T_k^1 も可換な代数群である．

$T_k^n := \underbrace{T_k^1 \times T_k^1 \times \cdots \times T_k^1}_{n\,個}$ として $\mu : T_k^n \times T_k^n \to T_k^n : ((a_i)_i, (b_i)_i) \mapsto (a_i b_i)_i$ とすると T_k^n も可換な代数群である．これを n 次元**トーラス** (torus) という．

(iii)　R を $x_{ij} (i, j = 1, \cdots, n)$ で生成される k 上の多項式環とする．$\Delta(x_{ij}) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}$ として R_Δ をアフィン環にもつアフィン多様体を $GL(n, k)$ と表す．明らかに $GL(n, k) \subset \mathbb{A}_k^{n^2}$ は稠密開集合で $GL(n, k)$ の点を $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ と表したとき $(a_{ij}), (b_{ij}) \in GL(n, k)$ に対し μ を $\mu((a_{ij}), (b_{ij})) = \left((\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj})_{ij} \right)$ なる行列の積で定義すると $GL_k(n)$ は k 上代数群になる．

定義 3.4.3　G を k 上の代数群，X を k 上の代数多様体とする．G が X に (k 上代数的に) **作用している** (act) とは，次の 2 条件が成立することである．

(1)　$\sigma : G \times X \to X$ なる k 上代数多様体の射が存在し，$\sigma(\mu(g, g'), x) = \sigma(g, \sigma(g', x))$ が任意の $g, g' \in G$, $x \in X$ に対して成立する．

(2)　$\sigma(e, x) = x$ が任意の $x \in X$ に対して成立する．

このとき $\sigma(g,x)$ を単に gx と表すことにする．

定義 3.4.4　k 上の代数的整多様体 X に k 上代数群 G が作用しているとする．$x \in X$ に対し $O_G(x) = \{gx \mid g \in G\} \subset X$ を x の**軌道** (orbit) とよぶ．

(1)　$X = O_G(x)$ となるような $x \in X$ が存在するとき X を**等質空間** (homogeneous space) とよぶ．

(2)　$X = \overline{O_G(x)}$ となるような $x \in X$ が存在するとき X を**概等質空間** (almost homogeneous space) とよぶ．

等質空間の任意の 2 点は自己同型によって互いに移り合う．よって 3.1.9 によりすべての点は非特異点と同型に移り合うことになるので，等質空間は非特異であることがわかる．一方概等質空間，稠密な軌道 $O_G(x)$ 上では非特異であるが，他の点では特異点である可能性がある．しかし各軌道内の点は同型で移り合うので同じ特異点が軌道に添って連らなっているということがわかる．

例 3.4.5

(i)　$GL(n+1,k)$ の $\mathbb{P}_k^n$ への作用を $\sigma((a_{ij}),(x_0:\cdots:x_n)) = {}^t\!\left((a_{ij})\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$ で定義する．するとすべての $\mathbb{P}_k^n$ の 2 点はこの作用によって移り合うので $\mathbb{P}_k^n$ は等質空間である．

(ii)　T_k^n の $\mathbb{P}_k^n$ への作用を $\sigma((a_1\cdots a_n),(x_0:\cdots:x_n)) := (x_0 : a_1x_1 : \cdots : a_nx_n)$ で定義すると $O_{T_k^n}((1:1:\cdots:1)) \subset \mathbb{P}_k^n$ は稠密開集合になるので，この作用によって概等質空間である．

さていよいよトーリック多様体の定義をしよう．

定義 3.4.6　X が**トーリック多様体** (toric variety) であるとは，

(1)　X は正規な n 次元 k 上代数的整多様体．

(2)　X はトーラス T_k^n の作用により概等質空間．

なるときをいう．

定義 3.4.7　2つのトーリック多様体 X, Y に対して k 上代数多様体の射 $f: X \to Y$ が**トーリック射** (toric morphism) であるとは，準同型な射 $\varphi: T^m \to T^n$ が存在し，

$$\begin{array}{ccc} T^m \times X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ {\scriptstyle \varphi\times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T^n \times Y & \xrightarrow{\sigma'} & Y \end{array}$$

が可換になることである．

ただし σ, σ' はそれぞれの作用を与える射．

これによりトーリック多様体とトーリック射からなる圏が得られる．次に有限な扇の圏を構成しよう．これがトーリック多様体の圏と同値になることがあとで示されるのである．

M を階数 n の自由 $\mathbb{Z}$-加群とする．N をその双対 $\mathbb{Z}$-加群，すなわち $N = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ とする．自然な $\mathbb{Z}$-双線型写像 $(\quad,\quad): N \times M \to \mathbb{Z}$ は $N_{\mathbb{R}} \times M_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ (ただし $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$) なる $\mathbb{R}$ 上の双線型写像に拡張される．

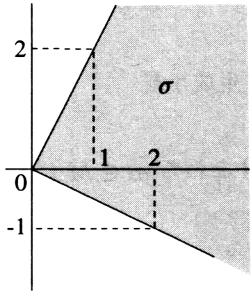
定義 3.4.8　$\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ が**有理強凸多面錐** (strongly convex rational polyhedral cone) であるとは有限個の N の元 $n_1, \cdots, n_s$ が存在して$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} n_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} n_s := \{a_1 n_1 + \cdots + a_s n_s : a_i \in \mathbb{R},\ a_i \geq 0\ {}^\forall i\}$ で，さらに $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ をみたすことである．

有理強凸多面錐 σ の**次元** (dimension) とは σ で生成される $N_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{R}$-ベクトル空間として次元のことである．

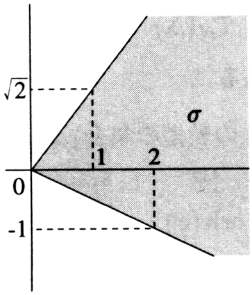
有理強凸多面錐 σ が**単体的** (simplicial) であるとは $s = \dim \sigma$ として，$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} n_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} n_s$ と表すことができることである．

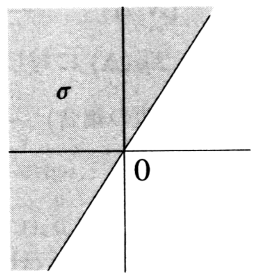
σ が有理強凸多面錐のとき，ある $m \in M$ で $(m, x) \geq 0\ {}^\forall x \in \sigma$ をみたすものがあって $\tau = \{y \in \sigma \mid (m, y) = 0\}$ と表わされているとき，τ を σ の**面** (face) とよび $\tau < \sigma$ と表す．τ は明らかに σ の生成元 $n_1, \cdots, n_s$ の一部で，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上生成されている．

例 3.4.9　$n=2$ として



は，有理強凸多面錐であるが次の 2 つはそうではない．





定義 3.4.10　(N, Δ) が**有限扇** (finite fan) であるとは，$N_{\mathbb{R}}$ の有限個の有理強凸多面錐の集合 Δ であって次の性質をもつものである：

(1)　$\sigma \in \Delta$ なら任意の $\tau < \sigma$ は $\tau \in \Delta$ をみたす．

(2)　$\sigma, \tau \in \Delta$ なら $\sigma \cap \tau < \sigma$, $\sigma \cap \tau < \tau$.

定義 3.4.11　(N, Δ), (N', Δ') を有限扇とする．$\varphi : (N, \Delta) \to (N'\Delta')$ が**有限扇の射** (morphism of finite fans) であるとは，$\mathbb{Z}$-加群の準同型 $\varphi : N \to N'$ であってその拡大 $\varphi : N_{\mathbb{R}} \to N'_{\mathbb{R}}$ が次の性質をみたすものである：

各 $\sigma \in \Delta$ に対し，$\sigma' \in \Delta'$ が存在して $\varphi(\sigma) \subset \sigma'$.

これによって有限扇の圏が得られる．

次の定理がトーリック多様体と有限扇を結びつける重要な定理である．

定理 3.4.12　(i)　N, M を前記のようにとる．次の全単射写像がある．

$$\eta : (N_{\mathbb{R}}\text{の有理強凸多面錐の集合}) \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \text{次の (a) (b) (c) をみたす} \\ M \text{ の部分半群 } S \text{ の集合} \end{pmatrix}$$

(a)　S は 0 を含む有限生成半群

(b)　S は群 M を生成

(c)　S は飽和である．すなわち $m \in M$ に対して正整数 a が存在して $am \in S$ となっている時，$m \in S$.

(ii)　次の圏の同型が存在する．

$$\begin{array}{ccc} \Phi : (\text{有限扇の圏}) & \xrightarrow{\sim} & (\text{トーリック多様体の圏}) \\ \Psi & & \Psi \\ (N, \Delta) & \longmapsto & T_N(\Delta) \end{array}$$

(iii)　$(N, \Delta) \longmapsto T_N(\Delta)$ に対して次の同型がある．

$$\begin{array}{ccc} (\Delta\text{の面の集合}) & \longrightarrow & (T_N(\Delta)\text{ の軌道の集合}) \\ \Psi & & \Psi \\ \sigma & \longmapsto & \operatorname{orb}(\sigma) \end{array}$$

ここで $\sigma < \tau \Longleftrightarrow \overline{\operatorname{orb}(\sigma)} \supset \operatorname{orb}(\tau)$．また $\dim \operatorname{orb}(\sigma) = \operatorname{rank} N - \dim \sigma$.

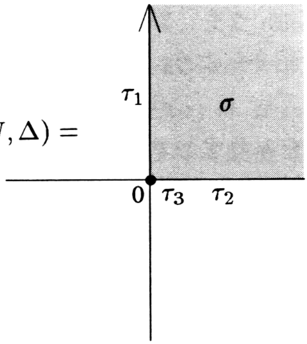
[略証]　η, Φ は次の様に構成される．まず $\sigma \in \Delta$ に対し $\sigma^\vee := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid (m, x) \geq 0, {}^\forall x \in \sigma\}$ とし $\eta(\sigma) := \sigma^\vee \cap M$ とする．この半群 $\sigma^\vee \cap M$ で生成される k 上の環 $k[\sigma^\vee \cap M]$ を座標環にもつアフィン多様体を U_σ と表す．ただし $k[\sigma^\vee \cap M] := k[X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_n^{m_n}]_{(m_1 \cdots m_n) \in \sigma^\vee \cap M}$．ここで $X_1, \cdots, X_n$ は変数．$\tau < \sigma$ に対し U_τ は自然に U_σ の開集合とみなせる．そこで，任意の $\sigma, \sigma' \in \Delta$ に対し $U_\sigma, U_{\sigma'}$ をそれぞれの開集合 $U_{\sigma \cap \sigma'}$ で貼り合わせることができる．すべての $\sigma \in \Delta$ について $\{U_\sigma\}$ をこのように貼り合わせて $T_N(\Delta)$ を構成する．$\sigma \in \Delta$ に対し $P(\sigma)$ を $(\sigma^\vee \cap M) \setminus (\sigma^\perp \cap M)$ で生成される $k[\sigma^\vee \cap M]$ のイデアルとし，$P(\sigma)$ で定義される U_σ の閉部分多様体を $\operatorname{orb}(\sigma)$ とする．詳しくは [Od3, 定理 1.4] [Od1, Theorem 4.1] を参照.

例 3.4.13　(i)　$N = \mathbb{Z}^n, \Delta = \{N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ の第一象限 σ とそのすべての面 $\}$ とすると $T_N(\Delta) = \mathbb{A}_k^n$．$T_k^n$ の作用による稠密な軌道は $(\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\})^n, \tau$ が σ の

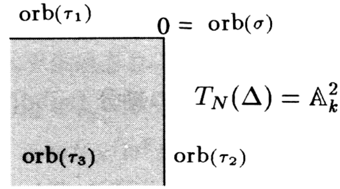
r 次元の面なら $\overline{\mathrm{orb}(\tau)}$ は $\mathbb{A}^n$ の r 個の座標平面の共通集合となっている.

特に

$(N, \Delta) =$

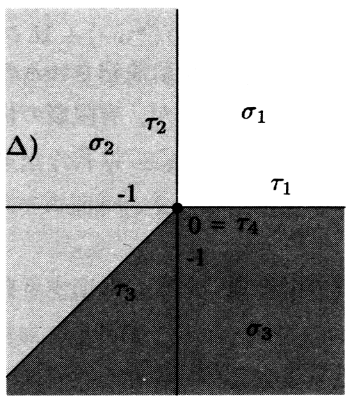


に対して

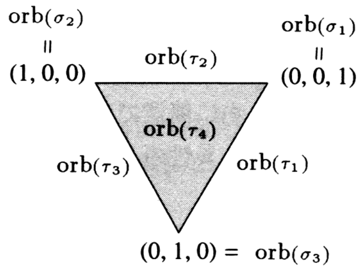


(ii)

(N, Δ)



に対して



$T_N(\Delta) = \mathbb{P}_k^2$

例 3.4.14 2 つの有限扇 (N, Δ) (N', Δ') が次をみたすとする.

(1) $N \subset N'$ 有限指数の部分群.

(2) $N_{\mathbb{R}} = N'_{\mathbb{R}}$ の中で $\Delta = \Delta'$.

このとき自然に有限扇の射 $\varphi : (N, \Delta) \to (N', \Delta')$ が, 導びかれるが, 定理 3.4.12 (ii) によりトーリック多様体の射 $T(\varphi) : T_N(\Delta) \to T_{N'}(\Delta')$ が得られる. この射は有限群 N'/N による商をとる射である. 特に $T_N(\Delta)$ が非特異の場合,

$T_N(\Delta')$ に表われる特異点は商特異点である (6.4 参照).

有限扇の射の中でよく使われる特別なものを紹介しよう.

例 3.4.15　2つの有限扇 (N, Δ) (N', Δ') が次をみたすとする.

(1)　$N = N'$.

(2)　Δ' が Δ の**細分** (subdivision), すなわち各 $\sigma \in \Delta$ に対し $\sigma = \bigcup_{\substack{\sigma' \in \Delta' \\ \sigma' \subset \sigma}} \sigma'$ となる.

このときも自然に有限扇の射 $\psi : (N', \Delta') \to (N, \Delta)$ が導びかれトーリック多様体の射 $T(\psi) : T_{N'}(\Delta') \to T_N(\Delta)$ が得られる．これは開集合上で同型となる固有射である．特に $T_N(\Delta')$ が非特異ならば，$T(\psi)$ は広義の特異点解消になる.

定理 3.4.12 でみたようにトーリック多様体は有限扇で完全に決定されるので多様体の色々な性質が有限扇の性質によっていい変えられるが，有限扇の性質の方がはるかに簡潔で直感的に理解しやすいものである．ここでは我々がこれから使う非特異性のみを紹介しよう.

定理 3.4.16　トーリック多様体 $T_N(\Delta)$ が非特異であることと，対応する有限扇 (N, Δ) が次をみたすこととは同値である.

任意の $\sigma \in \Delta$ に対し $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{e}_r$ の生成系 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ を延長して N の基底をつくることができる (このような Δ を**ユニモジュラー** (unimodular) な扇とよぶ).

[証明]　まず，Δ がユニモジュラーとする．任意の $\sigma \in \Delta$ について $\sigma = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{e}_i$ とすると $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ なる N の基底が存在する．M の双対基底を $\{\boldsymbol{e}_1^*, \cdots, \boldsymbol{e}_n^*\}$ とおく．すると $\sigma^\vee \cap M = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_{\geq 0}\boldsymbol{e}_i^* + \sum_{j=r+1}^{n} \mathbb{Z}\boldsymbol{e}_j^*$ であるから U_σ のアフィン環は $k[X_1, \cdots, X_r, X_{r+1}^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$ に同型．よって $U_\sigma \cong \mathbb{A}_k^r \times T_k^{n-r}$ となり非特異である．逆に U_σ が非特異であるとする．$N \cap \sigma$ の生成する N の $\mathbb{Z}$-部分加群を N_σ とし，N_σ の階数を r, σ のすべての面から

なる有限扇を $\langle\sigma\rangle$ と書くことにすると $U_\sigma \cong T_{N_\sigma}(\langle\sigma\rangle) \times T_k^{n-r}$ である．よって $T_{N_\sigma}(\langle\sigma\rangle)$ は非特異で，また $\dim\sigma = \operatorname{rank} N_\sigma$．したがって $\dim\sigma = \operatorname{rank} N = n$ の場合に σ がユニモジュラーになることを示せば十分．この場合 $\sigma^\perp \cap M = 0$ となるので $\mathfrak{m} := P(\sigma)$ は $R := k[\sigma^\vee \cap M]$ の極大イデアルとなる．このイデアルによって定義される点 x はもちろん U_σ の非特異点であるから，x における局所環 $R_\mathfrak{m}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ は n 個の元で生成される．R の元を，変数 $X_1, \cdots, X_n$ を用いて，$\sum_{\boldsymbol{m}\in\sigma^\vee\cap M} a_{\boldsymbol{m}} X^{\boldsymbol{m}}$ ($a_{\boldsymbol{m}} \in k$, $\boldsymbol{m} = (m_1, \cdots, m_n)$ に対して $X^{\boldsymbol{m}} := X_1^{m_1}, \cdots, X_n^{m_n}$) と表すと $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2R_\mathfrak{m}$ は k 上ベクトル空間として $X^{\boldsymbol{m}_1}, X^{\boldsymbol{m}_2}, \cdots, X^{\boldsymbol{m}_n}$ ($\boldsymbol{m}_i \in \sigma^\vee \cap M$) で生成されているとしてよい．これは $\boldsymbol{m}_1, \cdots, \boldsymbol{m}_n$ が $\sigma^\vee \cap M$ の中で，$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}' + \boldsymbol{m}''(\boldsymbol{m}', \boldsymbol{m}'' \neq 0$, $\boldsymbol{m}', \boldsymbol{m}'' \in \sigma^\vee \cap M)$ と表されない $\boldsymbol{m}$ の全体であることを示している．よって $\sigma^\vee \cap M$ は半群として $\boldsymbol{m}_1, \cdots, \boldsymbol{m}_n$ で生成されている．したがって $M = \sigma^\vee \cap M + (-\sigma^\vee) \cap M$ は群としてこれらで生成され $\sigma^\vee$ はユニモジュラーとなり，その双対 σ もユニモジュラーとなる．

例 3.4.17 $N = \mathbb{Z}^3$ $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}(1,2,1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(2,1,1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-1,5,1)$, Δ を σ のすべての面からなる有限扇とする．すると $T_N(\Delta)$ は非特異になる．

例 3.4.15 でみたように有限扇 (N, Δ) に対して，ユニモジュラーな細分 Δ' が構成できれば $T_N(\Delta)$ の広義の特異点解消が得られる．さらに強く次でみるように特異点解消を構成することができる．

定理 3.4.18 k を任意の代数閉体．任意の有限扇 (N, Δ) に対し Δ のユニモジュラーな細分 Δ' が存在して対応する k 上トーリック多様体の射 $\varphi : T_N(\Delta') \to T_N(\Delta)$ が特異点解消になっている．

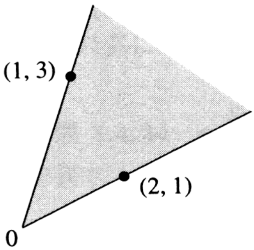
［証明］ 操作 1) ユニモジュラーになるためにはまず，各面が単体的でなければならない．すべての面が単体的になるような Δ の細分 Σ が次のように構成される．Δ に属する面で次元の小さいものから順に細分していこう．$\sigma \in \Delta$ として $\dim\sigma = 1, 2$ の場合，明らかに σ は単体的．$\dim\sigma \geq 3$ として $\dim\sigma$ より

小さい次元の面はすでに単体的であるとする．もし $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{e}_r$ が単体的ならそのまま，単体的でないなら $\lambda = \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{e}_1$ を含まない σ の任意の面 τ に対し錐 $\lambda + \tau$ は単体的であるから σ をこれらの $\lambda + \tau$ でおき換える．

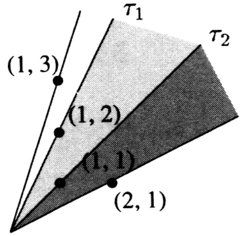
操作 2)　上で得られた Σ を次の様に細分してユニモジュラーにする．$\sigma = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{e}_i \in \Sigma$ に対し $N_\sigma = N \cap (\sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}\boldsymbol{e}_i)$．$\mathrm{mult}(\sigma) := |N_\sigma / \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z}\boldsymbol{e}_i|$ とおくと，明らかに $\mathrm{mult}(\sigma) = 1$ であることと σ がユニモジュラーであることは同値．また $\mathrm{mult}(\sigma)$ は平行多面体 $P_\sigma = \{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \boldsymbol{e}_i \mid 0 \leq \alpha_i < 1\}$ に含まれる N の点の数に等しい．σ がもしユニモジュラーならそのまま．σ がユニモジュラーでないなら $\boldsymbol{x} \neq 0$ なる N の点で P_σ に含まれるものがあるので，σ の細分を $\sigma_i = \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{e}_{i-1} + \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{x} + \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{e}_{i+1} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{e}_r$ $(i = 1, \cdots r)$ で構成する．明らかに各 σ_i は単体的であり $\mathrm{mult}(\sigma)$ は P_σ の体積に等しいので，$\mathrm{mult}(\sigma_i) < \mathrm{mult}(\sigma)$．この操作を順次行えば，やがてすべての錐 σ について $\mathrm{mult}(\sigma) = 1$ となる．

以上で Δ のユニモジュラーな細分 Δ' が得られたが上記の操作によって得られる $\varphi : T_N(\Delta') \to T_N(\Delta) = X$ は X_{reg} 上で同型になる．実際 $\sigma \in \Delta$ について $\mathrm{orb}(\sigma)$ の各元が X の非特異点とすると U_σ は非特異アフィン多様体．したがって σ は単体的なので操作 1 では何も変化していない．つまり $\sigma \in \Sigma$ で $T_N(\Sigma)$ における U_σ のアフィン環は前と同じ $k[\sigma^\vee \cap M]$．U_σ が非特異であることからさらに N_σ は σ で生成される $\mathbb{Z}$-部分加群と一致 (3.4.16 の証明) したがって P_σ に含まれる N の元は 0 のみ．よって第 2 の操作によっても U_σ は変化しない．

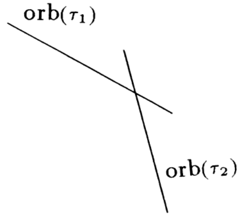
例 3.4.19　$N = \mathbb{Z}^2$, $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}(2,1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1,3)$, Δ を σ と σ のすべての面からなる有限扇とする．すると $T_N(\Delta)$ は特異点をもつ．そこで Δ を細分して $\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}(2,1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1,1)$, $\sigma_2 = \mathbb{R}_{>0}(1,1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1,2)$, $\sigma_3 = \mathbb{R}_{\geq 0}(1,2) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1,3)$ としてこれらとこれらのすべての面からなる有限扇を Δ' とすると $T_N(\Delta') \to T_N(\Delta)$ は特異点解消である．



(N, Δ)



(N, Δ')



例外集合

これからわかるように任意の 2 次元トーリック多様体の特異点は解消すると特異点 0 の逆像は既約曲線が一列に並んだものになることがわかる．

次に，weighted blow up とよばれるトーリック射を紹介しよう．

例 3.4.20　(N, Δ) を 3.4.13 のようにとる．$\mathbb{A}_k^n$ にはトーリック多様体としての構造 $T_N(\Delta)$ が入る．$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n) \in \sigma \cap N$ について Δ の細分 $\Delta(\boldsymbol{w})$ を $\sigma_i = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_{i-1} + \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{w} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_{i+1} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_n$ $(i = 1, \cdots, n)$ のすべての面からなる扇とする (このような細分を $\boldsymbol{w}$ による **星状細分** (star shaped decomposition) とよぶ)．対応する射 $\psi : T_N(\Delta(\boldsymbol{w})) \to T_N(\Delta)$ を weight $\boldsymbol{w}$ の **weighted blow up** とよぶ．$\boldsymbol{f}_i (i = 1, \cdots, n)$ を $\mathbf{e}_i (i = 1, \cdots, n)$ の双対基底，$a_{ij} = g.c.d.(w_i, w_j)$ とする．U_{σ_i} のアフィン環は $k[\sigma_i^\vee \cap M]$，$\sigma_i^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{f}_i + \sum_{j \neq i} \mathbb{R}_{\geq 0}(-\frac{w_j}{a_{ij}}\boldsymbol{f}_i + \frac{w_i}{a_{ij}}\boldsymbol{f}_j)$ となる．

トーリック多様体に登場する特異点は限られたものであるがその上の超曲面を考えることにより，その範囲は広がる．これからトーリック多様体 $\mathbb{A}_k^{n+1}$ の超曲面を考えよう．

定義 3.4.21　$f \in k[X_0, \cdots, X_n]$, $M = \mathbb{Z}^{n+1}$, $M_\mathbb{R} = M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ として，$M_\mathbb{R}$

の中に f の **ニュートン図形** (Newton diagram) $\Gamma_+(f)$ を定義しよう．$\boldsymbol{m} = (m_0, \cdots, m_n) \in M$ に対し $X^{\boldsymbol{m}} = X_0^{m_0} \cdots X_n^{m_n}$ と表すことにして，$f = \sum_{\boldsymbol{m} \in M} a_{\boldsymbol{m}} X^{\boldsymbol{m}}$, $a_{\boldsymbol{m}} \in k$ とする．$\mathrm{supp}\,(f) := \{\boldsymbol{m} \in M \mid a_{\boldsymbol{m}} \neq 0\}$ とおいて，

$$\Gamma_+(f) := \left(\bigcup_{\boldsymbol{m} \in \mathrm{supp}\,(f)} (\boldsymbol{m} + \mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1}) \right) \text{ の凸閉包}$$

と定義する．

定義 3.4.22　上記の記号を用いよう．f が **非退化** (non-degenerate) であるとは，任意の $\Gamma_+(f)$ のコンパクトな面 γ に対して $f_\gamma := \sum_{\boldsymbol{m} \in \gamma} a_{\boldsymbol{m}} X^{\boldsymbol{m}}$ で定義すると，$\frac{\partial f_\gamma}{\partial X_i} = 0$ $(i = 0, \cdots, n)$ が $(\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\})^{n+1}$ 上には共通零点を持たない．

定理 3.4.23　$f \in k[X_0, \cdots, X_n]$ を非退化な既約多項式で，f で定義される $\mathbb{A}_k^{n+1}$ の閉部分多様体を X とする．$\mathbb{A}_k^{n+1}$ をトーリック多様体 $T_N(\Delta)$ とみなす．ただし $N := Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ とし，Δ を 3.4.13 のようにとる．このとき Δ の細分 Δ' が存在して$\psi : T_N(\Delta') \to T_N(\Delta)$ の X の狭義の逆像 X' への制限 $\psi|_{X'} : X' \to X$ は $(X, 0)$ の近傍で広義の解消になっている．

[**証明**]　まず Δ' を構成しよう．Σ を Newton 図形 $\Gamma_+(f)$ の双対扇とする．すなわち $\Sigma = \{\gamma^*\}, \gamma$ は $\Gamma_+(f)$ の面で，

$$\gamma^* := \left\{ \boldsymbol{n} \in |\Delta| \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{関数 } \boldsymbol{n}|_{\Gamma_+(f)} \text{ は } \gamma \text{ のすべての点で} \\ \text{最小値をとる} \end{array} \right\}$$

とする．ただし $|\Delta|$ は Δ の錐全体の和集合．すると γ^* はすべて有理強凸多面錐になり，Σ は Δ の細分になっている．この Σ をユニモジュラーに細分したものを Δ' とする．

次に任意の $\tau \in \Delta'$ に対して

$$\tau^* := \left\{ \boldsymbol{m} \in \Gamma_+(f) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } \boldsymbol{n} \in \tau \text{ に対して} \\ (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) = \min_{m' \in \Gamma_+(f)} (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}') \end{array} \right\}$$

とすると τ^* は $\Gamma_+(f)$ の面になる．ここで $\tau \in \Delta'$ に対して $\tau^* \subset \Gamma_+(f)$ がコ

ンパクトであることと，$\mathrm{orb}\,\tau \subset \psi^{-1}(0)$ となることと同値であることに注意する．ただし $\psi : T_N(\Delta') \to T_N(\Delta)$ は細分 Δ' から導かれる写像．$\psi^{-1}(0)$ はこのような $\mathrm{orb}\,\tau$ で覆われているので，次の補題を示せは X' が $\psi^{-1}(0)$ に沿って非特異になり定理 3.4.23 の証明が終る．

補題 3.4.24 $\tau \in \Delta'$ に対し，τ^* がコンパクトならば X' は $\mathrm{orb}\,\tau$ に沿って非特異で，さらに $\mathrm{orb}\,\tau$ と横断的に交わる．

［証明］ 仮定より $\frac{\partial f_{\tau^*}}{\partial X_i} = 0$ $(i = 0, \cdots, n)$ は $\left(\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}\right)^{n+1}$ 上に共通零点をもたない．これより $X_i \frac{\partial f_{\tau^*}}{\partial X_i} = 0$ $(i = 0, \cdots, n)$ が $\left(\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}\right)^{n+1}$ 上に共通零点をもたないことがわかる．τ が 1 次元，$\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}\boldsymbol{p}$ $(\boldsymbol{p} \in N)$ の場合に証明しよう．一般の場合も証明は同様である．$\tau < \sigma$, $\dim \sigma = n+1$ なる $\sigma \in \Delta'$ をとり σ の生成系を $\boldsymbol{p} = (a_0^0, a_1^0, \cdots, a_n^0)$, $(a_0^1 a_1^1, \cdots, a_n^1), \cdots, (a_0^n, \cdots, a_n^n) \in N$ とする．$U_\sigma \cong \mathbb{A}_k^{n+1}$ となり，この生成系に関する座標を $Y_0, \cdots, Y_n$ とおくと，$X_i = Y_0^{a_i^0} Y_1^{a_i^1} \cdots Y_n^{a_i^n}$ $(i = 0, \cdots, n)$ なる座標変換式を得る．また U_σ 上で $\overline{\mathrm{orb}\,\tau}$ は $Y_0 = 0$ で定義される．さて，$f(X)$ を U_σ 上で見ると，

$$f(X) = Y_0^m(g^0(Y_1, \cdots, Y_n) + Y_0 g^1(Y_0, \cdots, Y_n)) \quad \cdots (1).$$

ここで $g := g^0 + Y_0 g^1$ とおくと，$\mathrm{orb}\,\tau$ の近傍 U_τ で X の狭義の逆像 X' は $g = 0$ で定義され，$f_{\tau^*} = Y_0^m g^0(Y_1, \cdots, Y_n)$ であることがわかる．

ここで $\mathrm{orb}\,\tau$ の点 $P = (0, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $y_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が X' の特異点としよう．すると，$i \neq 0$ に対して

$$\frac{\partial g}{\partial Y_i}(0, y_1, \cdots, y_n) = \frac{\partial g^0}{\partial Y_i}(y_1, \cdots, y_n) = 0 \quad \cdots (2).$$

また，

$$g(0, y_1, \cdots, y_n) = g^0(y_1, \cdots, y_n) = 0 \quad \cdots (3).$$

さて $i \neq 0$ について $Y_i \frac{\partial f_{\tau^*}}{\partial Y_i}(1, y_1, \cdots, y_n)$ を計算すると $y_i \frac{\partial g^0}{\partial Y_i}(y_1, \cdots, y_n)$ となり (2) より 0 となる．一方これは $Y_i \sum_{j=0}^n \frac{\partial X_j}{\partial Y_i} \frac{\partial f_{\tau^*}}{\partial X_j}(1, y_1, \cdots, y_n) = \sum_{j=0}^n a_j^i X_j \frac{\partial f_{\tau^*}}{\partial X_j}(1, y_1, \cdots, y_n)$．また $i = 0$ についても $Y_0 \frac{\partial f_{\tau^*}}{\partial Y_0}(1, y_1, \cdots, y_n)$ を

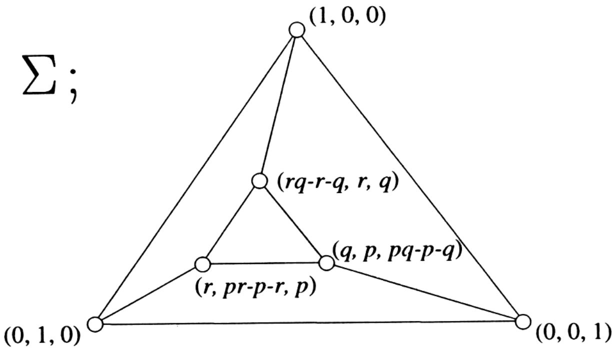
計算すると (3) により 0 となり一方でこれは $\sum_{j=0}^{n} a_j^0 X_j \frac{\partial f_{\tau^*}}{\partial X_j}(1, y_1, \cdots, y_n)$. 点 $(1, y_1, \cdots, y_n)$ を X-座標で表すと座標変換式より $\left(\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}\right)^{n+1}$ の点になり，行列 (a_{ij}) がユニモジュラーであることを使えば $X_j \frac{\partial f_{\tau^*}}{\partial X_j} = 0$ $(j = 0, \cdots, n)$ が $\left(\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}\right)^{n+1}$ 上で共通零点をもつことになり矛盾．

X' が $\operatorname{orb}\tau$ と横断的に交わることを示すためには $g|_{\operatorname{orb}\tau} = 0$ で定義される $\operatorname{orb}\tau$ 上の超曲面が非特異であることを示せば良い．$g|_{\operatorname{orb}\tau} = g^0(Y_1, \cdots, Y_n)$ であるが，これが $(y_1, \cdots, y_n) \in \operatorname{orb}\tau$ $(y_i \neq 0)$ で特異点とすると (2) (3) が成立することとなり上と同じ議論で仮定に矛盾する．

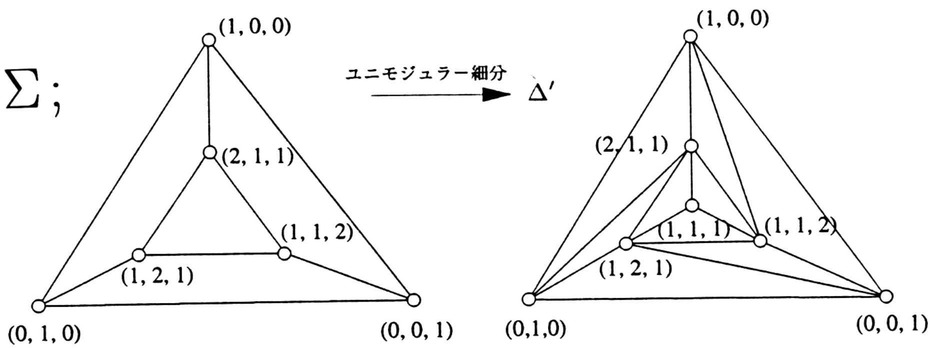
系 3.4.25　非退化な既約多項式 f で定義される $\mathbb{A}_k^{n+1}$ の閉部分多様体が 0 で孤立特異点をもっているとする．$\Delta' \setminus \Delta$ の 1 次元錐がすべて第一象限 $\mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1}$ の内部にあるならば $X' \to X$ は特異点解消である．

［証明］ 射 $\psi : T_N(\Delta') \to T_N(\Delta)$ が同型にならならない $T_N(\Delta')$ の点の集合は $\bigcup_{\tau \in \Delta' \setminus \Delta} \operatorname{orb}\tau$ となる．1 次元の $\tau \in \Delta' \setminus \Delta$ に対して，τ は $\mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1}$ の内部にあるので $\psi(\operatorname{orb}\tau) = \{0\}$. 任意の錐 $\sigma \in \Delta' \setminus \Delta$ に対して $\tau < \sigma, \tau \in \Delta' \setminus \Delta$ なる 1 次元の錐があるので，$\psi(\operatorname{orb}\sigma) \subset \psi(\overline{\operatorname{orb}\tau}) = \{0\}$. よって ψ は $T_N(\Delta) = \mathbb{A}_k^{n+1}$ の原点の外では同型となる．

例 3.4.26　$\mathbb{A}_k^3$ の超曲面 X が $f = X_0X_1X_2 + X_0^p + X_1^q + X_2^r \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1\right)$ で定義されているとすると X は原点で孤立特異点をもつ．この特異点を $\boldsymbol{T_{pqr}}$**-特異点**とよぶ．このとき Σ は次のようになる．3 次元の扇なので，この紙面への投影図は見にくくなるので，原点を中心とする球面で切りとった図形を描くことにする．よって頂点は 1 次元の錐を表わし，付随する座標はその錐上の点を表す．



たとえば $(p,q,r) = (4,4,4)$ とすると



これによって T_{444}-特異点の解消が得られるが，容易にわかるようにユニモジュラーな細分のつくり方はただ一つではない．また T_{444} は原点の blow up のみで解消されることも簡単にわかる．この方が手順は易しい (3.3.10 参照)． ニュートン図形によるトーリックな解消はトーリック多様体の軌道との横断性まで主張しているので超曲面自体の解消のみを求めるという点では無駄のある操作を含んでいる．しかし確実に特異点解消は得られるのである．またこの手法は色々な例を計算するときにとても役に立つものである．

第 4 章　多様体上の因子とその層

技巧を駆使した証明には簡単な別証がある.

この章では代数的整多様体上の因子的層と，因子との同値関係を紹介し，標準因子および標準層を導入する．我々は後に特異点の近傍の標準層と特異点を解消してできた多様体の標準層を比較することによって特異点の悪さ加減を測るのである.

約束　この章で扱う多様体はすべて代数閉体 k 上の代数的整多様体とする.

4.1　局所的自由層，可逆層，因子的層

定義 4.1.1　$\mathcal{F}$ を連接的 $\mathcal{O}_X$-加群とする．$a \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ が $\mathcal{F}$ の**ねじれ元** (torsion element) であるとは，開部分集合 $V \subset U$ と 0 でない元 $g \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ が存在して，V 上で $ga = 0$ となることをいう．ここで任意の開集合 $U \subset X$ に対し

$$\Gamma(U, Tor_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F})) := \{a \in \Gamma(U, \mathcal{F}) \mid a \text{ は } \mathcal{F} \text{ のねじれ元}\}$$

と定義すると $Tor_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F})$ は，$\mathcal{F}$ の部分 $\mathcal{O}_X$-加群となる．これを $\mathcal{F}$ の**ねじれ部分** (torsion part) とよぶ．$Tor_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}) = 0$ となる $\mathcal{F}$ を**ねじれのない** (torsion-free) $\mathcal{O}_X$-加群という．明らかに商加群 $\mathcal{F}/Tor_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F})$ はねじれのない $\mathcal{O}_X$-加群になる.

定義 4.1.2　連接的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ が**局所的自由** (locally free) であるとは，X の

開被覆 $X = \cup U_i$ が存在し，各 U_i 上で $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X^{\oplus r_i}|_{U_i}$ となることである．ここで X は既約なので，任意の U_i, U_j に対し $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ であるので上記の r_i は共通でなければならない．この値を $\mathcal{F}$ **の階数** (rank) とよぶ．特に階数 1 の局所自由連接層を**可逆層** (invertible sheaf) とよぶ．局所的自由性について次の性質がある．

次の命題により連接層の 1 つの茎が自由加群であるという性質は近傍にまで拡張されることがわかる．

命題 4.1.3　連接的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ について次が成立．

(i) $x \in X$ に対し，$\mathcal{F}_x$ が自由 $\mathcal{O}_{X,x}$-加群とする．すなわち $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{O}_{X,x}^{\oplus r}$ なる同型があるとする．このとき x の近傍 $U \subset X$ が存在して U 上で同型 $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_X^{\oplus r}|_U$ がある．

(ii) 任意の $x \in X$ に対し $\mathcal{F}_x$ が自由 $\mathcal{O}_{X,x}$-加群であれば $\mathcal{F}$ は局所的自由である．

［証明］ (i) を示すために X をアフィン多様体として良い．アフィン環を A とし，x の定義イデアルを M とおく．$F := \Gamma(X, \mathcal{F})$ とすると $\mathcal{F}_x = F \otimes_A A_M$．$\mathcal{F}_x$ の $\mathcal{O}_{X,x}$ 上の自由生成元 $\alpha_i = \frac{f_i}{g_i}$ $(i = 1 \cdots r,\ f_i \in F,\ g_i \in A - M)$ をとる．$g := \prod_i g_i \in A - M$ として X を $X_g = \{y \in X \mid g(y) \neq 0\}$ ととり換えることにより $\alpha_i \in F$ として良い．準同型 $\varphi : \mathcal{O}_X^{\oplus r} \to \mathcal{F}$ を $(h_1, \cdots, h_r) \mapsto \sum h_i \alpha_i$ によって定義する．$\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ も $\mathcal{F}$ も連接的だから $\operatorname{Ker}\varphi$ と $\operatorname{Coker}\varphi$ も連接的．よって $\operatorname{Supp}(\operatorname{Ker}\varphi)$, $\operatorname{Supp}(\operatorname{Coker}\varphi)$ はともに X の閉集合で x を含まない．したがって x の適当な開近傍上で φ は同型．(ii) は (i) より明らか．

命題 4.1.4　任意の連接的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ に対し X の空でない開集合 U があって $\mathcal{F}|_U$ は局所的自由である．

［証明］ $x \in X$ に対し $d(x) := \dim_k \mathcal{F}_x \otimes \boldsymbol{k}(x)$, $\boldsymbol{k}(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$ とおくと $U := \{x \in X \mid d(x)$ は最小値 $\}$ は開集合になる．実際，中山の補題

より，各 $x \in U$ に対し $\mathcal{F}_x$ は $d = d(x)$ 個の元 $a_1, \cdots, a_d$ で生成されている．$a_i \in \Gamma(U_x, \mathcal{F})$ となるようなアフィン開集合 U_x をとり $\eta : \mathcal{O}_X^{\oplus d}|_{U_x} \to \mathcal{F}|_{U_x}, (h_1, \cdots, h_d) \mapsto \sum h_i a_i$ と定義すると $\operatorname{Coker} \eta \otimes \boldsymbol{k}(x) = 0$ となる．よって U_x を適当に小さくとり直せば $\operatorname{Coker} \eta = 0$ となり，η は全射すなわち $\mathcal{F}|_{U_x}$ は $\{a_i\}$ で生成されているので $U_x \subset U$, すなわち U は開集合．次に $\{a_i\}$ は $\mathcal{O}_X|_{U_x}$ 上の自由基底であることを示すために $\sum g_i a_i = 0$, $g_i \in \Gamma(U_x, \mathcal{O}_X)$ とおく．各 $y \in U_x$ に対してこれは $\mathfrak{m}_{X,y}$ を法として自明な線型関係式でなければならないので $g_i \in \mathfrak{m}_{X,y}$ ($^\forall y \in U_x$). g_i はアフィン整多様体 U_x の任意の点で値 0 をとるのでヒルベルトの零点定理より $g_i = 0$.

定義 4.1.5　連接的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ が開集合 U 上で階数 r の局所的自由になるとき，この r を $\mathcal{F}$ の**階数** (rank) とよぶ．

特に 1 次元の非特異多様体においては，次が成立．

命題 4.1.6　(i)　R を 1 次元の正規局所環とする．F を有限生成 R-加群とすると，次の同値が成りたつ：

$$F \text{ は自由 } R\text{-加群} \iff F \text{ はねじれのない } R\text{-加群}$$

(ii)　X を k 上 1 次元非特異代数多様体，$\mathcal{F}$ を X 上の連接的 $\mathcal{O}_X$-加群とすると次の同値が成りたつ：

$$\mathcal{F} \text{ は局所的自由} \iff \mathcal{F} \text{ はねじれのない } \mathcal{O}_X\text{-加群}$$

[証明]　(i) $\Rightarrow$ は自明．　$\Leftarrow$ はねじれがないので明らかに $0 \neq f \in R$ に対し $F \xrightarrow{\times f} F$ は単射．よって $\operatorname{depth} F \geq 1$．また 1 次元正規は 1 次元正則と同値であるので $\operatorname{projdim} F < \infty$ となり，Auslander-Buchsbaum の等式 ([Ma2, Th19.1]) より $\operatorname{projdim} F + \operatorname{depth} F = \dim R = 1$ が成立．よって $\operatorname{projdim} F = 0$ すなわち F が射影的でなければならない．局所環上の射影的加群は自由加群である．実際 F が射影的であれば，$\dim F \otimes R/\mathfrak{m} = d$ として，自然な全射 $\varphi : R^d \twoheadrightarrow F$

と $1_F : F \to F$ に対して $1_F = \varphi \circ \psi$ なる $\psi : F \to R^d$ が存在する．よって部分加群 T が存在して $R^d \cong F \oplus T$ となるが $R^d \otimes R/\mathfrak{m} \simeq F \otimes R/\mathfrak{m}$ より $T \otimes R/\mathfrak{m} = 0$. よって中山の補題より $T = 0$.
(ii) は，(i) と 4.1.3 (ii) および $(Tor_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}))_x = Tor_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x)$ より従う．

$\dim X \geq 2$ の場合はねじれのない $\mathcal{O}_X$-加群は必ずしも局所的自由とは限らないが正規代数多様体上では次のようなことがいえる．

命題 4.1.7　k 上の代数的整多様体 X が正規であると仮定する．ねじれのない連接的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ に対して次のような開集合 $X_0 \subset X$ が存在する：

(i)　$\operatorname{codim}_X(X \setminus X_0) \geq 2$

(ii)　$\mathcal{F}|_{X_0}$ は局所的自由

［証明］ X をアフィン多様体としてよい．任意の余次元 1 の既約な閉部分集合 Z に対し $Z \cap W \neq \emptyset$ なる開集合 W が存在し，$\mathcal{F}|_W$ が局所的自由になることを示せば十分．X のアフィン環を A とし Z の定義イデアルを $\mathfrak{p}$ とすると $\mathfrak{p}$ は高さ 1 で A は正規環であるから $A_\mathfrak{p}$ は一次元の正規局所環．$F := \Gamma(X, \mathcal{F})$ はねじれのない A-加群だから，$F \otimes_A A_\mathfrak{p}$ はねじれのない $A_\mathfrak{p}$-加群．よって 4.1.6 より自由 $A_\mathfrak{p}$-加群になる．$F \otimes_A A_\mathfrak{p}$ の生成元を $\alpha_i = \frac{f_i}{h_i}$ $(i = 1, \cdots, r,\ f_i \in F,\ h_i \in A \setminus \mathfrak{p})$ とし $h = \prod_{i=1}^r h_i$ とすると，$h \in A \setminus \mathfrak{p}$ より $Z \cap X_h \neq \emptyset$. よって X をこの X_h ととり換えることにより $\alpha_i \in F$ としてよい．ここで $\mathcal{F}'$ を $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ で生成される $\mathcal{F}$ の部分 $\mathcal{O}_X$-加群とする．$A \hookrightarrow A_\mathfrak{p}$ は単射であり $\{\alpha_i\}$ は $F \otimes_A A_\mathfrak{p}$ の中で，$A_\mathfrak{p}$ 上線型独立であるから $F' = \Gamma(X, \mathcal{F}')$ の A 上の自由生成系である．よって $\mathcal{F}'$ は自由 $\mathcal{O}_X$-加群．ある開集合上で $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ となることを示そう．$\mathcal{L} := \mathcal{F}/\mathcal{F}'$, $L := \Gamma(X, \mathcal{L})$ とおき，L の A 上の生成系を $l_1, \cdots, l_s$ とする．定義より，$L \otimes_A A_\mathfrak{p} = 0$ であったから，$g_j \in A \setminus \mathfrak{p}$ が存在して $g_j l_j = 0$ $(j = 1, \cdots, s)$. $g := \prod_{j=1}^s g_j$ とすると $g \in A \setminus \mathfrak{p}$ より $Z \cap X_g \neq \emptyset$ で，さらに $\Gamma(X_g, \mathcal{L}) = L \otimes_A A_g$ の中で $l_j = 0$ $(j = 1, \cdots, s)$. よって $\mathcal{L}|_{X_g} = 0$ となり X_g 上で $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

これから再帰的層を定義する．そのためにいくつか準備をしなければならない．

定義 4.1.8　連接的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ に対し $\mathcal{F}^* := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ と定義し $\mathcal{F}$ の**双対** (dual) とよぶ．

4.1.9　任意の $\mathcal{F}$ に対し，$\mathcal{F}^*$ はねじれのない $\mathcal{O}_X$-加群となる．また，自然な準同型 $\varphi := \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{**}$ が次のように定義される：$a \in \mathcal{F}$ に対し $\varphi(a) : \mathcal{F}^* \to \mathcal{O}_X$ を $f \mapsto f(a)$. ここで $\mathcal{F}$ が局所的自由ならば φ は同型になる．

補題 4.1.10　正規な代数多様体 X 上の連接的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ について $\operatorname{codim}_X(X - X_0) \geq 2$ をみたす開集合 $X_0 \subset X$ の上で $\mathcal{F}|_{X_0}$ は局所的自由になっているとする．このとき 4.1.9 の $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{**}$ は同型 $j_*(\mathcal{F}|_{X_0}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{**}$ をひきおこす．ここで $j : X_0 \hookrightarrow X$ は包含写像.

[証明]　任意の開集合 $U \subset X$ に対し $U_0 = U \cap X_0$ と表す．各元 $a \in \Gamma(U, j_*(\mathcal{F}|_{X_0})) = \Gamma(U_0, \mathcal{F})$ に対して $\widetilde{\varphi}_a : \Gamma(U, \mathcal{F}^*) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $f \mapsto f(a)$ は well-defined である．実際，$a \in \Gamma(U_0, \mathcal{F})$, $f : \mathcal{F}|_U \to \mathcal{O}_X|_U$ より $f(a) \in \Gamma(U_0, \mathcal{O}_X)$ となるが $\operatorname{codim}_X(X \setminus X_0) \geq 2$ と X が 正規であることより，$\Gamma(U_0, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. これで φ により $j_*(\mathcal{F}|_{X_0}) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathcal{F}^{**}$ がひきおこされたことがわかる．任意の開集合 U 上で $\widetilde{\varphi}$ は可換図式：

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(U, j_*(\mathcal{F}|_{X_0})) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_U} & \Gamma(U, \mathcal{F}^{**}) \\
\| & & \downarrow \rho \\
\Gamma(U_0, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\varphi_{U_0}} & \Gamma(U_0, \mathcal{F}^{**})
\end{array}$$

をみたす．ここで $\mathcal{F}|_{X_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{**}|_{X_0}$ より φ_{U_0} は同型になり $\mathcal{F}^{**}$ はねじれがないので ρ は単射になり，したがって $\widetilde{\varphi}_U$ は同型になる．

定理 4.1.11　正規な多様体 X 上のねじれのない連接的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{L}$ について次の三条件は同値である．

(i) $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{**}$.

(ii) $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$, $\operatorname{codim}_X(\operatorname{Supp} \mathcal{M}/\mathcal{L}) \geq 2$ なるねじれのない $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{M}$ は $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ のみである．

(iii) $X_0 \subset X$ を $\operatorname{codim}_X(X \setminus X_0) \geq 2$ なる開集合で $\mathcal{L}|_{X_0}$ は局所的自由とすると $j_*(\mathcal{L}|_{X_0}) = \mathcal{L}$ ただし $j : X_0 \hookrightarrow X$ は包含写像.

［証明］ (i) ⇒ (ii). 4.1.7 と (ii) の仮定より，開集合 $U \subset X$ で $\operatorname{codim}_X(X \setminus U) \geq 2$ なるものが存在して $\mathcal{L}|_U = \mathcal{M}|_U$ は局所的自由になる．包含写像 $j : U \hookrightarrow X$ として $j_*(\mathcal{L}|_U) = j_*(\mathcal{M}|_U)$. したがって 4.1.10 と (i) より包含関係 $\mathcal{L} \subset \mathcal{M} \subset j_*(\mathcal{M}|_U) = j_*(\mathcal{L}|_U)$ はすべて等式になる．

(ii) ⇒ (iii). $\mathcal{M} = j_*(\mathcal{L}|_{X_0})$ をとればよい．

(iii) ⇒ (i) は 4.1.10 より．

定義 4.1.12 正規な多様体 X 上のねじれのない連接的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{L}$ が 4.1.11 の (i) (ii) (iii) (のいずれか) をみたすとき，$\mathcal{L}$ を**再帰的** (reflexive) であるという．特に階数 1 のものを**因子的** (divisorial) であるという．

4.2 因子

定義 4.2.1 K を体とするとき写像 $\nu : K^* = K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ が**離散附値** (discrete valuation) であるとは次の二条件をみたすときである．

(1) $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$

(2) $\nu(x + y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$

ここで $\mathcal{O} := \{x \in K^* \mid \nu(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ は K の部分環になるが，これを $\boldsymbol{\nu}$ **の離散附値環** (discrete valuation ring) とよぶ．明らかに $\mathcal{O}$ は局所環になり $\mathfrak{m} := \{x \in K^* \mid \nu(x) > 0\} \cup \{0\}$ が極大イデアルになる．

例 4.2.2 R を 1 次元正則局所環，$\mathfrak{m}$ をその極大イデアル，$Q(R)$ を R の商体，$\mathfrak{m}$ の生成元を x とする．$\nu : Q(R) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ を次のように定義する

$$\nu(a) = \begin{cases} r, & a \in R, \quad a = u \cdot x^r \quad (u \text{ は単元}) \\ \nu(\alpha) - \nu(\beta), & a = \alpha/\beta \quad \alpha, \beta \in R \end{cases}$$

すると ν は離散附値, R は ν の離散附値環になる．特に X を正規アフィン多様体，A をそのアフィン環，$Z \subset X$ を既約な余次元 1 の閉部分集合，$\mathfrak{p} = I(Z)$ とすると，$A_{\mathfrak{p}}$ は 1 次元正規局所環．よって 3.1.11 により正則で上記のように定義した離散附値を ν_Z と表わし，Z に付随する離散附値とよぶ．X を正規多様体，$Z \subset X$ を既約な余次元 1 の閉部分集合としたとき Z に付随する離散附値 ν_Z を $U \cap Z \neq \emptyset$ なるアフィン開集合 U をとり，U の中で $Z \cap U$ に付随する離散附値として定義する．これはアフィン開集合 U のとり方によらないことに注意しておく．X は整であるので，任意の $x \in X$ に対して，商体 $Q(\mathcal{O}_{X,x})$ は共通で，任意のアフィン開集合のアフィン環の商体と一致する．これを $k(X)$ と書いて X の**有理関数体** (rational function field) とよぶ．また任意の開集合 $U \subset X$ に対して $\Gamma(U, \mathcal{F}) = k(X)$ なる層 $\mathcal{F}$ を，また $k(X)$ と表す．明らかに $\mathcal{O}_X$ は $k(X)$ の部分層である．

離散附値環は次のような特徴づけをもつ．

命題 4.2.3　R を 1 次元 Noether 局所環とする．次は同値である．

(i)　R は正則

(ii)　R は離散附値環

証明は，たとえば [A-M Proposition 9.2].

定義 4.2.4　正規な多様体 X 上の余次元 1 の既約閉部分集合 Γ を X 上の**素因子** (prime divisor) とよび，形式和 $\sum n_\Gamma \Gamma$ ($n_\Gamma \in \mathbb{Z}$, 有限個の Γ を除いて $n_\Gamma = 0$) を X 上の**因子** (divisor) または**ヴェイユ因子** (Weil divisor) とよぶ．X 上の因子全体の集合を**因子群** (divisor group) とよび $\mathrm{Div}\,(X)$ と表すと，これは $\sum n_\Gamma \Gamma + \sum m_\Gamma \Gamma = \sum (n_\Gamma + m_\Gamma)\Gamma$ により自由アーベル群の構造をもつ．$f \in k(X)$ に対し $(f) = \sum \nu_\Gamma(f)\Gamma$ と表すと次の補題より有限個の Γ を除いて $\nu_\Gamma(f) = 0$ だから $(f) \in \mathrm{Div}\,(X)$ となる．このような因子 (f) を**主因子**

(principal divisor) とよぶ.

因子 $D = \sum n_\Gamma \Gamma$ において $n_\Gamma \geq 0$ $(\forall_\Gamma)$ なるとき D は**有効** (effective) であるといい, $D \geq 0$ と表す. 特に $n_\Gamma > 0$ なる Γ が存在するとき $D > 0$ と表す. $D_1 - D_2 \geq 0$ (または > 0) のときに $D_1 \geq D_2$ (または $D_1 > D_2$) と表す.

補題 4.2.5 X を正規多様体とすると, 任意の $f \in k(X)^*$ に対して, $\nu_\Gamma(f) \neq 0$ となる X の素因子 Γ は有限個である.

[**証明**] 離散附値 ν に対して $\nu(f) < 0$ ならば $\nu(f^{-1}) > 0$ だから $\nu_\Gamma(f) > 0$ なる Γ が有限個であることを示せば十分. 今, $\nu_\Gamma(f) > 0$ とすると X のアフィン開集合 U があり $f \in A_\mathfrak{p}$ ただし A は U のアフィン環, $\mathfrak{p} = I(U \cap \Gamma) \subset A$. よって, U をさらに小さくとり直すことにより $f \in A$ として良い. 開集合 $X \setminus U$ 上に素因子は高々有限個しか存在しない. 一方 U 上の素因子 Γ' で $\nu_{\Gamma'}(f) > 0$ なるものを考えると $f \in \mathfrak{p}' = I(U \cap \Gamma')$. A は Noether 環なのでこれをみたす高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}'$ は有限個しかない.

定義 4.2.6 X を正規多様体とする. $D = \sum n_\Gamma \Gamma \in \mathrm{Div}\,(X)$ に対して層 $\mathcal{O}_X(D)$ を次のように定義する:

開集合 $U \subset X$ に対し $\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) := \left\{ f \in k(X)^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \nu_\Gamma(f) \geq -n_\Gamma \\ \Gamma : U \text{ の素因子} \end{array} \right\} \cup \{0\}$.
するとこれは, 定値層 $k(X)$ の部分 $\mathcal{O}_X$-加群になる. よってねじれがないことは明らかである.

因子 D と層 $\mathcal{O}_X(D)$ は次のような関係をもつ.

定理 4.2.7 正規多様体 X 上で $D \in \mathrm{Div}\,(X)$ に対し $\mathcal{O}_X(D)$ を対応させる次の写像 Φ は全単射である.

$$\Phi : \mathrm{Div}\,(X) \xrightarrow{\ \sim\ } \left\{ \begin{array}{c} \text{因子的な } \mathcal{O}_X\text{-部分加群} \\ \mathcal{L} \subset k(X) \end{array} \right\}$$

［証明］ まず D の外側で $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$ であるから $\mathcal{O}_X(D)$ の階数は 1. 開集合 $X_0 \subset X$ を $\operatorname{codim}_X(X \setminus X_0) \geq 2$ で $\mathcal{O}_X(D)|_{X_0}$ が可逆になるものとする. $j : X_0 \hookrightarrow X$ を包含写像として $j_*(\mathcal{O}_X(D)|_{X_0}) = \mathcal{O}_X(D)$ を示そう. 任意の開集合 $V \subset X$ に対し $\operatorname{codim}_V(V \setminus X_0) \geq 2$ だから V の素因子と $V \cap X_0$ の素因子は 1 対 1 に対応する. よって $\mathcal{O}_X(D)$ の定義より,

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_X(D)) = \Gamma(V \cap X_0, \mathcal{O}_X(D)) = \Gamma(V, j_*(\mathcal{O}_X(D)|_{X_0}))$$

が得られる. 4.1.11 (iii) より $\mathcal{O}_X(D)$ は因子的になる.

逆に任意の因子的 $\mathcal{O}_X$-部分加群 $\mathcal{L} \subset k(X)$ に対し, 4.1.7 より $\operatorname{codim}(X \setminus X_0) \geq 2$ なる開集合 X_0 があって $\mathcal{L}|_{X_0}$ は可逆層. よって X_0 の開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^s$ があって $\varphi_i : \mathcal{O}_X|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{U_i}$. ここで $f_i = \varphi_i(1)$ とおき, $\Gamma \cap U_i \neq \emptyset$ なる素因子 Γ に対しては $n_\Gamma := -\nu_\Gamma(f_i)$ とおく. $U_i \cap U_j \cap \Gamma \neq \emptyset$ については $f_j = uf_i$ (u は $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O})$ の単元) となっているので, n_Γ の定義は U_i のとり方によらない. 補題 4.2.5 より $D = \sum n_\Gamma \Gamma \in \operatorname{Div}(X)$ が得られる. この $\mathcal{L} \mapsto \sum n_\Gamma \Gamma$ は Φ の逆の対応を与えていることがわかる.

命題 4.2.8　正規多様体 X 上で, 因子の和と因子的 $\mathcal{O}_X$-加群の対応は次のようになる

$$\mathcal{O}_X(D_1 + D_2) = \left(\mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)\right)^{**}$$

特に $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$, $m \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{O}_X(mD)$ を $\mathcal{L}^{[m]}$ と書く. 明らかに $\mathcal{L}^{[m]} = (\mathcal{L}^{\otimes m})^{**} = j_*(\mathcal{L}|_{X_{\mathrm{reg}}}^{\otimes m})$ である. ここで $j : X_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow X$ は包含写像.

ここで特に良い性質をもっている因子を定義しよう.

定義 4.2.9　$\mathcal{O}_X(D)$ が可逆層になるような因子 D を**カルティエ因子** (Cartier divisor) とよぶ. カルティエ因子全体を $C\operatorname{Div}(X)$ と表す.

定義 4.2.10　D, $D' \in \operatorname{Div}(X)$ に対してある $f \in k(X)$ が存在して $D' = D + (f)$ となっている時に $D \sim D'$ と書き D と D' は**線型同値** (linearly

equivalent) であるという．ただし (f) は $\sum \nu_\Gamma(f)\Gamma$ で定義される因子とし，f によってきまる**主因子** (principal divisor) とよぶ．実際 $\sim$ は $\mathrm{Div}\,(X)$ の中の同値関係になっている．$\mathcal{C}\ell(X) := \mathrm{Div}\,(X)/\sim$ と定義すると $\mathcal{C}\ell(X)$ には $\mathrm{Div}\,(X)$ から自然にアーベル群の構造が入る．

特に X が完備な非特異曲線の場合，$D \in \mathrm{Div}\,(X)$ は $D = \sum_{P\in X} n_P P$ と表されるが D の**次数** (degree) $\deg D$ を $\sum_P n_P$ で定義する．すると有理関数 $f \in k(X)$ に対して $\deg(f) = 0$ であるので $D \sim D'$ ならば $\deg D = \deg D'$ であることがわかる．したがって，$\deg \mathcal{O}(D) := \deg D$ と定義すれば，次の定理より同型な可逆層 $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}'$ に対し $\deg \mathcal{L} = \deg \mathcal{L}'$.

定理 4.2.11 正規多様体 X について，4.2.7 の対応 $\Phi : D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ は全単射

$$\widetilde{\Phi} : \mathcal{C}\ell(X) \xrightarrow{\sim} \{\text{因子的 } \mathcal{O}_X\text{-加群}\} \big/ \simeq$$

をひきおこす．ここで $\simeq$ は $\mathcal{O}_X$-加群の同型による同値関係を表す．

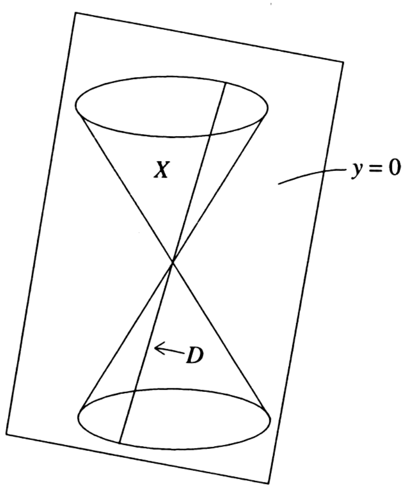
［証明］ $D' = D + (f)$ とすると $\mathcal{O}_X(D') = f^{-1} \cdot \mathcal{O}_X(D)$ より $\mathcal{O}_X(D') \cong \mathcal{O}_X(D)$. 逆に 2 つの因子的 $\mathcal{O}_X$-部分加群 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subset k(X)$ に対して $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ ならば $\mathcal{L}_1 = f\cdot\mathcal{L}_2$ なる $f \in k(X)$ が存在するので $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_X(D_i)$ $i = 1,2$ とすると $D_1 \sim D_2$. あとは任意の因子的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{L}$ が定値層 $k(X)$ の部分層と同型になることを示せば良い．X_0 を 4.1.7 の開集合とする．$\mathcal{L}|_{X_0} \longrightarrow \mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X} k(X)|_{X_0}$, $f \mapsto f \otimes 1$ は自然な単射になり下で定義される同型 $\eta : \mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X} k(X)|_{X_0} \xrightarrow{\sim} k(X)|_{X_0}$ とつなげると $\mathcal{L}|_{X_0} \hookrightarrow k(X)|_{X_0}$, よって $\mathcal{L} = j_*(\mathcal{L}|_{X_0}) \hookrightarrow k(X) = j_*(k(X)|_{X_0})$ が得られる．ただし $j : X_0 \hookrightarrow X$ は包含写像．ここで同型 η は次のように得られる．開集合 $U \subset X_0$ を $\mathcal{L}|_U \simeq \mathcal{O}_X|_U$ なるものとすると $\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X} k(X)|_U \simeq k(X)|_U$ すなわち X は既約だから局所的に定値層なら X_0 全体で定値層．よって η が得られる．

次に係数を有理数にまで拡大した因子を考えよう．

定義 4.2.12　$\mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ の元を **$\mathbb{Q}$-因子**とよぶ．また $C\mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ の元を **$\mathbb{Q}$-カルティエ因子**とよぶ．

$C\mathrm{Div}(X)\otimes\mathbb{Q}$, $\mathrm{Div}(X)$ を自然に $\mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ に埋め込んで考える．$C\mathrm{Div}(X)\otimes\mathbb{Q}\cap\mathrm{Div}(X)\supset C\mathrm{Div}(X)$ であるが，両者は必ずしも一致しない．その例を見てみよう．

例 4.2.13　$\mathbb{A}_k^3$ の中で，$xy+z^2=0$ で定義されるアフィン多様体を X とする．X の特異点は原点のみであるから X は正規である (3.1.11, (iii))．X の中で $D=V(y,z)$ とするとこれは $\mathbb{A}_k^1$ に同型な素因子となる．しかし，$\mathcal{O}_X(D)$ は可逆でないので D はカルティエ因子ではない．ここで $\mathcal{O}_X(2D)$ は y^{-1} で生成される自由 $\mathcal{O}_X$-加群なので，D は，$\mathbb{Q}$-カルティエ因子である．



定義 4.2.14　D を代数多様体 X 上のカルティエ因子とする．代数多様体の全射 $f:Y\to X$ に対して $f^*\mathcal{O}(D)$ はまた $k(X)$ の部分可逆層になる．Y 上のカルティエ因子 f^*D を $\mathcal{O}_Y(f^*D)=f^*\mathcal{O}(D)$ で定義する．また $\mathbb{Q}$-カルティエ因子 D に対しては rD がカルティエ因子になるような $r\in\mathbb{Z}$ をとり f^*D を $\frac{1}{r}f^*(rD)$ で定義する．

4.3　標準層と標準因子

まず非特異多様体上に標準層を定義し，射影空間の標準層を用いて一般の射影多様体の標準層を定義する．アフィン多様体などの擬射影多様体 X の標準層は，射影化の標準層を開集合 X に制限したものである．定義は必ずしも正規とは限らないものに対してなされるが，正規であるものだけを扱うのであれば系 4.3.9 を標準層の定義と思って良い．

定義 4.3.1　X を n 次元非特異代数多様体とする．X 上の標準層 $\widetilde{\omega}_X$ を微分形式の層 Ω_X を用いて次のように定義する：

$$\widetilde{\omega}_X = \bigwedge^n \Omega_X$$

4.3.2　n 次元非特異代数多様体 X について Ω_X は階数 n の局所的自由 $\mathcal{O}_X$-加群である．実際 3.1.7 (vi) の証明より $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ を極大イデアルとすると $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} \Omega_{X,x}/\mathfrak{m}\Omega_{X,x}$, $f \mapsto df$ は同型であるので任意の $x \in X$ に対し $\dim \Omega_{X,x}/\mathfrak{m}\Omega_{X,x} = n$. よって中山の補題より，$\Omega_X$ は階数 n の局所的自由 $\mathcal{O}_X$-加群である (4.1.4 の証明参照). またちょうど n 個の元の集合 $x_1, \cdots, x_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ を $\mathfrak{m}$ の生成系とする (このようなものを**正則パラメータ系** (regular system of parameters) とよぶ). すると Ω_X は x の近傍で $dx_1, \cdots, dx_n$ で生成されている．したがって $\widetilde{\omega}_X$ は $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ で生成されている．正則パラメータ系については次のことが知られている．

命題 4.3.3　([Ma2, Th. 14.2 p.105])　R を n 次元正則局所環，$\mathfrak{m}$ を極大イデアル，$x_1, \cdots, x_i \in \mathfrak{m}$ とする．このとき次の条件は同値.

(i)　$x_1, \cdots, x_i$ は正則パラメータ系の一部である．

(ii)　$R/(x_1, \cdots, x_i)$ は $(n-i)$ 次元正則局所環になる．

命題 4.3.4　([Ma1, Th. 36])　$R, \mathfrak{m}$ を 4.3.3 と同様とする．あるイデアル $I \subset \mathfrak{m}$ について R/I がまた正則になったとすると次をみたす R の正則パラメータ系

$x_1, \cdots, x_n$ が存在する：

$(x_1, \cdots, x_i) = I, \overline{x}_{i+1}, \cdots, \overline{x}_n \in R/I$ は R/I の正則パラメータ系，また I/I^2 は $\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_i$ で生成される階数 i の自由 R/I-加群になる．

定義 4.3.5　X を擬射影的整多様体とする，すなわち X はある射影的整多様体 $\overline{X} \subset \mathbb{P}^N$ の開部分多様体．$\dim X = n$ としたとき X の**標準層** (canonical sheaf) ω_X を次で定義する：

$$\omega_X := \mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_{\overline{X}}, \widetilde{\omega}_{\mathbb{P}^N})|_X$$

定理 4.3.6　n 次元射影的整多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対し次が成立する．

(i)　準同型 $t : H^n(X, \omega_X) \to k$ が存在し，任意の連接的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ について次が成立する：自然な双線型写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) \times H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \omega_X)$$

が存在し，t とつなげることによって同型：

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \mathcal{F})^*$$

が得られる．ここで，$*$ は k 上の双対空間を表す．

(ii)　ω_X は埋め込み $X \subset \mathbb{P}^N$ によらない．

(iii)　任意の $i \geq 0$，任意の連接的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ に対し自然な同型：$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) \simeq H^{n-i}(X, \mathcal{F})^*$ があるということと X が Cohen-Macaulay 的であるということは同値である．

証明は，たとえば [AK, IV.5] 参照．

ω_X の性質を調べよう．そのために次の補題を準備する．

補題 4.3.7　P を N 次元非特異多様体，$X \subset P$ を n 次元の非特異な閉部分多様体，$\mathcal{J}$ をそのイデアル層とすると，任意の連接的 $\mathcal{O}_P$-加群 $\mathcal{F}$ に対して，次

の自然な同型がある：

$$\mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\left(\bigwedge^{N-n} \mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F}\right)$$

[証明]　X の各点の十分小さなアフィン開近傍 $U \subset P$ 上で $\mathcal{J}$ は $r = N-n$ 個の元 $x_1,\cdots,x_r$ で生成されている．$F=\Gamma(U,\mathcal{F})$, $J=\Gamma(U,\mathcal{J})$, $A=\Gamma(U,\mathcal{O}_P)$ としてまず次を証明する：

$$\text{(4.3.7.1)} \qquad \mathrm{Ext}^r_A(A/J,F) \simeq \mathrm{Hom}_{A/J}\left(\bigwedge^r J/J^2, F/JF\right).$$

組 $\mathfrak{X}=(x_1,\cdots,x_r)$ に対して次の複体 $K.(\mathfrak{X})$ を定義する (これを Koszul 複体とよぶ).

$$K_p(\mathfrak{X}) = \begin{cases} \bigwedge^p\left(\bigoplus_{i=1}^r Ae_i\right) & 0 \le p \le r \\ 0 & p<0, \quad p \ge r+1 \end{cases}$$

$$d_p : K_p(\mathfrak{X}) \longrightarrow K_{p-1}(\mathfrak{X});$$

$$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p} \mapsto \sum(-1)^j x_{i_j} e_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{e}_{i_j}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

ここで e_i $(i=1,\cdots,r)$ は A 上の自由基底．すると $K.(\mathfrak{X}) \to A/J$ は A/J の射影的分解になることが知られている ([Ma1, Theorem 43, p.135])．したがって 2.3.10 より $\mathrm{Hom}_A(K.(\mathfrak{X}),F)$ のコホモロジー $H^p(\mathrm{Hom}\,(K.(\mathfrak{X}),F))$ が $\mathrm{Ext}^p_A(A/J,F)$ を与える．一方，特に $p=r$ のときに，

$$\varphi_{\mathfrak{X}} : \mathrm{Ext}^r_A(A/J,F) = H^r\big(\mathrm{Hom}\,(K.(\mathfrak{X}),F)\big) \to \mathrm{Hom}_{A/J}\left(\bigwedge^r J/J^2, F/JF\right)$$

を次のように定義する：

$$f: K_r(\mathfrak{X}) \to F \text{ に対し } \varphi_{\mathfrak{X}}(f) : \bigwedge^r J/J^2 = (A/J)x_1\wedge\cdots\wedge x_r \to F/JF$$

$$x_1\wedge\cdots\wedge x_r \mapsto \overline{f(e_1\wedge\cdots\wedge e_r)}.$$

すると $\varphi_{\mathfrak{X}}$ は同型になる．実際，全射性は明らかであり，単射性は $\varphi_{\mathfrak{X}}(f)=0$ とすると，$f(e_1\wedge\cdots\wedge e_r)=\sum_{i=1}^r x_i a_i$ $({}^\exists a_i \in F)$ であるからこの a_i を用いて

$g : K_{r-1}(\mathfrak{X}) = \bigwedge^{r-1}(\bigoplus Ae_i) \to F$ を $g(e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_j} \wedge \cdots \wedge e_r) = (-1)^j a_j$ で定義すると明らかに $d(g) = f$. したがって $\varphi_{\mathfrak{X}}$ は単射. これで (4.3.7.1) が証明された. あとは $\varphi_{\mathfrak{X}}$ の貼り合わせが整合性をもつことを示せばよい. J の 2 つの生成系 $\mathfrak{X} = (x_1, \cdots, x_r)$ $\mathcal{Y} = (y_1, \cdots, y_r)$ に対して $y_i = \sum c_{ij} x_j$ とすると $\varphi_{\mathfrak{X}}(f)(y_1 \wedge \cdots \wedge y_r) = \varphi_{\mathfrak{X}}(f)(\det(c_{ij}) x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \det(c_{ij}) \overline{f(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r)}$. 一方同型 $K.(\mathfrak{X}) \cong K.(\mathcal{Y})$ は $e \mapsto \sum d_{ij} e'_j$ で与えられる. ただし $(d_{ij}) = (c_{ij})^{-1}$ で $(e'_1, \cdots, e'_r)$ は $K.(\mathcal{Y})$ の基底. したがって

$$
\begin{array}{ccc}
K_r(\mathfrak{X}) & \xrightarrow{\ f\ } & F/JF \\
\wr\downarrow & \nearrow_{f'} & \\
K_r(\mathcal{Y}) & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
e_1 \wedge \cdots \wedge e_r & \xrightarrow{\ f\ } & \overline{f(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r)} \\
\updownarrow & \nearrow_{f'} & \\
\det(d_{ij}) e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_r & &
\end{array}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\det(c_{ij}) \overline{f(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r)} &= \det(c_{ij}) \overline{f'(\det(d_{ij}) e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_r)} \\
&= \overline{f'(e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_r)} = \varphi_{\mathcal{Y}}(f')(y_1 \wedge \cdots \wedge y_r)
\end{aligned}
$$

より $\varphi_{\mathfrak{X}}(f) = \varphi_{\mathcal{Y}}(f')$

ω_X のもつ基本的な性質をみよう.

定理 4.3.8　n 次元射影的多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対し次が成立する.

(i)　$\omega_X|_{X_{\mathrm{reg}}} \simeq \widetilde{\omega}_{X_{\mathrm{reg}}}$

(ii)　ω_X はねじれのない $\mathcal{O}_X$-加群である.

(iii)　ω_X は 4.1.11 (ii) の主張をみたす. すなわちねじれのない $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{M}$ が $\omega_X \subset \mathcal{M}$, $\mathrm{codimSupp}\,(\mathcal{M}/\omega_X) \geq 2$ を満たしているなら $\mathcal{M} = \omega_X$

[証明] (i)　X_{reg} とその $\mathbb{P}^N$ 内での開近傍 P, そして $\mathcal{F} = \widetilde{\omega}_P$ に対して補題 4.3.7 を適用. $\mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{reg}}}, \widetilde{\omega}_P) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_{\mathrm{reg}}}}(\bigwedge^{N-n} \mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \widetilde{\omega}_P/\mathcal{J}\widetilde{\omega}_P)$. 4.3.4 により $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ は階数 $N-n$ の局所的自由 $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{reg}}}$-加群であるので

$\bigwedge^{N-n}\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ は $X_{\rm reg}$ 上の可逆層．よって右辺 $\cong (\bigwedge^{N-n}\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_{X_{\rm reg}}}(\widetilde{\omega}_P\otimes\mathcal{O}_{X_{\rm reg}})$．一方完全例： $0\to\mathcal{J}/\mathcal{J}^2\to\Omega_P\otimes\mathcal{O}_{X_{\rm reg}}\to\Omega_{X_{\rm reg}}\to 0$ より，$\bigwedge^N\Omega_P\otimes\mathcal{O}_{X_{\rm reg}}\cong(\bigwedge^{N-n}\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)\otimes(\bigwedge^n\Omega_{X_{\rm reg}})$．したがって $\bigwedge^n\Omega_{X_{\rm reg}}\cong(\bigwedge^{N-n}\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^{-1}\otimes(\widetilde{\omega}_P\otimes\mathcal{O}_{X_{\rm reg}})\cong\mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_{X_{\rm reg}},\widetilde{\omega}_P)$．

(ii) $T = Tor_{\mathcal{O}_X}\omega_X$ とおくと 4.1.4 より $\dim\operatorname{Supp}T\le n-1$．よって $H^n(X,T)=0$． 4.3.6, (i) より $\operatorname{Hom}(T,\omega_X)=0$．これにより包含写像 $i:T\hookrightarrow\omega_X$ が 0 写像，すなわち $T=0$ がわかる．

(iii) $\operatorname{codim}(\operatorname{Supp}\mathcal{M}/\omega_X)\ge 2$ より $i=n,\,n-1$ に対して $H^i(\mathcal{M}/\omega_X)=0$．よって $H^n(X,\omega_X)\simeq H^n(X,\mathcal{M})$．この同型の双対をとると $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega_X,\omega_X)\simeq\operatorname{Hom}(\mathcal{M},\omega_X)$．$id_{\omega_X}$ に対応する $\varphi:\mathcal{M}\to\omega_X$ は $\omega_X\hookrightarrow\mathcal{M}$ の切断を与えるので，完全例 $0\to\omega_X\to\mathcal{M}\to\mathcal{M}/\omega_X\to 0$ は分裂し $\mathcal{M}=\omega_X\oplus\mathcal{M}/\omega_X$．ここで $\mathcal{M}/\omega_X\ne 0$ とすると $\mathcal{M}$ はねじれがないということに矛盾する．

系 4.3.9 X が n 次元正規な擬射影的多様体のとき，ω_X は因子的であり $\omega_X\simeq j_*(\bigwedge^n\Omega_{X_{\rm reg}})$．ただし $j:X_{\rm reg}\hookrightarrow X$ は包含写像．

［証明］ ω_X が 4.1.11 の (ii) の主張を満たしているので定義より明らか．

定義 4.3.10 X が正規な擬射影的多様体のとき $\omega_X\cong\mathcal{O}(K_X)$ となる因子 K_X を**標準因子** (canonical divisor) とよぶ．4.2.11 より標準因子は線型同値の意味で一意的である．

X の標準因子と，X のカルティエ因子の標準因子は次のような関係をもつ．

命題 4.3.11 X を擬射影的整多様体，$D\subset X$ をカルティエ因子とする．X が Cohen-Macaulay 多様体であるとき

$$\omega_D\cong\omega_X(D)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_D$$

ただし $\omega_X(D)=\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X(D)$．これを**添加公式** (adjunction formula) とよぶ．

［証明］ 埋め込み $D \subset X \subset \mathbb{P}^N$ があるとして良い．$\dim X = n$ とする．完全列 $0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0$ より完全列：

$$\begin{aligned}&\longrightarrow \mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_D, \omega_{\mathbb{P}^N}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^N}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}(-D), \omega_{\mathbb{P}^N})\\ &\longrightarrow \mathcal{E}xt^{N-n+1}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_D, \omega_{\mathbb{P}^N}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^{N-n+1}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^N})\end{aligned}$$

を得る．2.5.14 より $\mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_D, \omega_{\mathbb{P}^N})_x = H^n_{\{x\}}(\mathcal{O}_D) = 0$. また X は n 次元で Cohen-Macaulay だから 2.5.13 より $\mathcal{E}xt^{N-n+1}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^N})_x = H^{n-1}_{\{x\}}(\mathcal{O}_X) = 0$. よって $\omega_D = \mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X(-D), \omega_{\mathbb{P}^N})/\omega_X$. ここで X の各点に対し開近傍 $U \subset \mathbb{P}^N$ とその上の因子 $\widetilde{D} \subset U$ が存在し，$\widetilde{D}|_{U \cap X} = D|_U$ となっているので $\mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X(-D), \omega_{\mathbb{P}^N}) = \mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-\widetilde{D}) \otimes \mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^N}) \cong$ $\mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^N}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(\widetilde{D}) = \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$.

したがって $\omega_D = \omega_X(D)/\omega_X \cong \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \left(\mathcal{O}_X(D)/\mathcal{O}_X\right) \cong \omega_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-D) \simeq \omega_X(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D$.

X の性質と X 上のカルティエ因子の性質を比較してみよう．

命題 4.3.12　(i)　整多様体上の特異点 (X, x) が Cohen-Macaulay 特異点であることと，x を含むカルティエ因子 D に対し (D, x) が Cohen-Macaulay 特異点であることは同値である．

(ii)　整多様体上の特異点 (X, x) が Gorenstein 特異点であることと，カルティエ因子 (D, x) が Gorenstein 特異点であることは同値である．

［証明］ (i)　$\mathcal{O}_X(-D)$ の x における生成元を h とすると，h はねじれ元ではないので完全列：

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\times h} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{D,x} \longrightarrow 0$$

を得る．これより次の完全列が得られる：

$$\mathrm{Ext}^{\,i}_{\mathcal{O}_{X,x}}(k, \mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\,i}_{\mathcal{O}_{X,x}}(k, \mathcal{O}_{D,x}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\,i+1}_{\mathcal{O}_{X,x}}(k, \mathcal{O}_{X,x})$$

ここで (X, x) が Cohen-Macaulay 特異点なら $\operatorname{depth} \mathcal{O}_{X,x} = \dim X$ より 2.5.13

を用いて $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X,x}}(k, \mathcal{O}_{X,x}) = 0,\ i < \dim X$ を得るが，上の完全列より，

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X,x}}(k, \mathcal{O}_{D,x}) = \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_{D,x}}(k, \mathcal{O}_{D,x}) = 0, \quad i < \dim X - 1$$

再び 2.5.13 より $\operatorname{depth} \mathcal{O}_{D,x} \geq \dim X - 1 = \dim D$. 逆に (D, x) が Cohen-Macaulay 特異点とする．$h_1, \cdots, h_{n-1}$ $(n-1 = \dim D)$ を $\mathcal{O}_{D,x}$ の正則列とすると，h はねじれ元でないので，$h, h_1, h_2, \cdots, h_{n-1}$ は $\mathcal{O}_{X,x}$ の正則列になる．よって (X, x) は Cohen-Macaulay 特異点.

(ii) (i) より (X, x) (D, x) は共に Cohen-Macaulay として良いことがわかる．4.3.11 より $\omega_D \cong \omega_X(D) \otimes \mathcal{O}_D$ であるから，点 x の近傍で ω_D が可逆であることと，ω_X が可逆であることは同値.

4.4 因子の交差数

この節ではカルティエ因子同志の交差数を定義する.

定理 4.4.1 (Snapper [Sn]) X を代数多様体 $D_1, \cdots, D_r$ を X 上のカルティエ因子，$\mathcal{F}$ を連接的 $\mathcal{O}_X$-加群で $\operatorname{Supp} \mathcal{F}$ は n-次元で完備とする．このとき 次数 $\leq n$ の $\mathbb{Q}$-係数の多項式 $P(z_1, \cdots, z_r)$ が存在して $\chi\bigl(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(m_1 D_1 + \cdots + m_r D_r)\bigr) := \sum_i (-1)^i \dim H^i\bigl(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(m_1 D_1, + \cdots + m_r D_r)\bigr) = P(m_1, \cdots, m_r)$, ${}^\forall m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{Z}$ となる.

定義 4.4.2 上で $r \geq n$ のとき $P(z_1, \cdots, z_r)$ における単項式 $z_1 \cdots z_r$ の係数を $D_1, \cdots, D_r$ の $\mathcal{F}$ に関する**交差数** (intersection number) とよび $(D_1, \cdots, D_r; \mathcal{F})$ と表す.

特に，ある完備閉部分多様体 Y に対して $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$ のとき $(D_1, \cdots, D_r; \mathcal{F})$ を $(D_1, \cdots, D_r; Y)$ と表す．さらに $Y = X$ のときは単に $(D_1, \cdots, D_r)$ と表す．D_i がすべて D と一致しているとき D^r と表す.

定義より交差数は $\mathcal{F}, \mathcal{O}_X(D_i)$, $i = 1, \cdots, r$ によってきまるので $D_i \sim D'_i$, $i = 1, \cdots, r$ ならば $(D_1, \cdots, D_r; \mathcal{F}) = (D'_1, \cdots, D'_r; \mathcal{F})$. X が完備 n 次元代数多様体，X の閉部分多様体 Y がカルティエ因子であるとき

$$(D_1,\cdots,D_{n-1};\mathcal{O}_Y)=(D_1,\cdots,D_{n-1},Y).$$

交差数については次の性質が基本的である．

命題 4.4.3　(Kleiman [Klm])　交差数について次が成立する．

(i)　$(D_1,\cdots,D_r;\mathcal{F})$ は整数である．

(ii)　$C\mathrm{Div}\,(X)\times\cdots\times C\mathrm{Div}\,(X)\to\mathbb{Z}$, $(D_1,\cdots,D_r)\mapsto(D_1,\cdots,D_r;\mathcal{F})$ は対称な多重線型写像である．

命題 4.4.4　C が代数多様体 X 上の完備な非特異曲線の場合，X 上のカルティエ因子 D に対して

$$(D;C)=\deg D|_C.$$

ここで，$D|_C$ は $\mathcal{O}_C(D|_C)=\mathcal{O}_X(D)\otimes\mathcal{O}_C$ となるような C 上の因子を表す．

［証明］ まず $(D;C)$ の定義により $\chi(C,\mathcal{O}_X(mD)\otimes\mathcal{O}_C)=(D;C)m+\mathcal{X}(C,\mathcal{O}_C)$, 特に $m=1$ として

$$\chi(C,\mathcal{O}_X(D)\otimes\mathcal{O}_C)=(D;C)+\mathcal{X}(C,\mathcal{O}_C)$$

を得る．一方 $D|_C=D_1-D_2$, $D_1=\sum n_iP_i\geq 0$, $D_2=\sum m_jP_j\geq 0$ とおく．完全列：

$$0\to\mathcal{O}_C(-D_2)\to\mathcal{O}_C(D_1-D_2)\to\mathcal{O}_{D_1}(D_1-D_2)\cong\mathcal{O}_{D_1}\to 0,$$
$$0\to\mathcal{O}_C(-D_2)\to\mathcal{O}_C\to\mathcal{O}_{D_2}\to 0$$

より

$$\chi\big(C,\mathcal{O}_C(D_1-D_2)\big)=\chi\big(C,\mathcal{O}_C(-D_2)\big)+\sum n_i$$
$$\chi(C,\mathcal{O}_C)=\chi\big(C,\mathcal{O}_C(-D_2)\big)+\sum m_j$$

が得られる．よって

$$\chi(C, \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_C) = \sum n_i - \sum m_j + \mathcal{X}(C, \mathcal{O}_C).$$

したがって，$(D; C) = \sum n_i - \sum m_j$ を得る．

次の定理は重要である．

定理 4.4.5 (Riemann-Roch の定理 [Ha2, IV, 1.3 & V, 1.6])　(i)　X を完備な非特異代数曲線，D を X 上のカルティエ因子とすると次が成り立つ：

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(D)) = \deg D + \chi(X, \mathcal{O}_X).$$

(ii)　X を完備な非特異代数曲面，D を X 上のカルティエ因子とすると次が成り立つ：

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(D)) = \frac{D^2 - K_X \cdot D}{2} + \chi(X, \mathcal{O}_X)$$

ここで D^2 は $D \cdot D$ の意味である．

定義 4.4.6　X を代数多様体，C を X 上の完備な曲線とする．D を X 上のカルティエ因子として $(D; C)$ を単に $D \cdot C$ と表す．また $D \in C\mathrm{Div}\,(X) \otimes \mathbb{Q}$ に対し，$rD \in C\mathrm{Div}\,(X)$ とするとき $D \cdot C := \frac{1}{r}(rD) \cdot C$ と定義する．代数多様体の固有射 $f : Y \to X$ において $f(C) =$ 一点 となっている任意の曲線 C に対し $D \cdot C \geq 0$ となっているとき D は ***f*-nef** であるという．特に X が一点の場合の f-nef を単に **nef** という．

第5章　特異点のまわりの微分形式

魅力的な仮説は証明できない．
大定理は証明が間違っている．
証明が正しければ主張は自明である．

この章では特異点のまわりの微分形式を特異点の解消空間にまで引きもどし，例外因子の上での極の持ち方を考察する．これにより孤立特異点の多重種数が定義され，その増大度によって，孤立特異点の大まかな分類がなされる．この章の多様体はすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上の代数的整多様体とする．

5.1　分岐公式

5.1.1　正規な n 次元代数的整多様体 X に対し有理関数体を $\mathbb{C}(X)$ と表す．X 上の有理的 m 重形式 $\theta \in \Gamma\big(X, \omega_X^{[m]} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{C}(X)\big)$ に対して，附値 $\nu_D(\theta)$ (D は X の素因子) を定義する．D の一般の点 x において X は非特異であるから正則パラメータ系 $x_1, \cdots, x_n$ として，$(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)^{\otimes m}$ が $\omega_X^{[m]}$ の x での生成元である．x の近傍で $\theta = f(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)^{\otimes n}$ $\big(f \in \mathbb{C}(X)\big)$ と表されているとき $\nu_D(\theta) := \nu_D(f)$ と定義する．特に θ が $\Gamma\big(X, \omega_X^{[m]}(\sum_{i=1}^r m_i D_i)\big) = \Gamma\big(X, \mathcal{O}_X(mK_X + \sum_{i=1}^r m_i D_i)\big)$ に属していることと $\nu_{D_i}(\theta) \geq -m_i$ $(i = 1, \cdots, r)$, $\nu_D(\theta) \geq 0$ $(D \neq D_i)$ をみたすことは同値である．

$\nu_D(\theta) > 0$ であるとき θ は D で**零** (zero) をもつといい，$\nu_D(\theta) < 0$ であるとき θ は D で**極** (pole) をもつという．

定義 5.1.2　代数的整多様体の固有射 $f : Y \to X$ が**有限** (finite) であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して逆像 $f^{-1}(x)$ が有限個の元からなる場合をいう．また

固有射 $f : Y \to X$ が**広義有限** (generically finite) であるとは，空でない開集合 $U \subset X$ が存在して $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ が有限である場合をいう．このとき U を $f|_{f^{-1}(U)}$ が有限になるような最大の開集合とし，閉集合 $Y \setminus f^{-1}(U)$ の成分 E で $\dim E > \dim f(E)$ となっているものの和集合を**例外集合** (exceptional set) とよぶ．例外集合に含まれる因子を**例外因子** (exceptional divisor) とよぶ．

またすべての既約例外因子 $E_1, \cdots, E_r$ の和 $\sum_{i=1}^r E_i$ を**全例外因子** (total exceptional divisor) とよぶ．

一般に位相空間 X 上の点の性質 P について $U := \{x \in X \mid$ 点 x は性質 P をもつ$\}$ が X の稠密開部分集合であるとき，X の**一般の点** (general point) は性質 P をもつという言い方をする．例えば X が代数的整多様体であるとき X の一般の点は，非特異である．また有限個の稠密部分集合の共通部分はまた稠密になるので有限個の性質 $P_1, \cdots, P_r$ に対し X の一般の点が性質 P_i を持っていることが $i = 1, \cdots, r$ について成立していれば，X の一般の点が $P_1, \cdots, P_r$ 全ての性質を持つことがわかる．

$f : Y \to X$ を正規多様体の広義有限射とする．D_1, D_2 をそれぞれ Y, X の素因子で $f(D_1) = D_2$ とする．D_2 の一般の点 x の近傍において D_2 も X も非特異として良いので，4.3.4 により，正則パラメータ系 $x_1, \cdots, x_n$ が存在し D_2 が $x_1 = 0$ で定義されているとして良い．同様に $y \in f^{-1}(x)$ の近傍において正則パラメータ系 $y_1, \cdots, y_n$ が存在し D_1 が $y_1 = 0$ で定義されているとして良い．$f(D_1) = D_2$ より $f^*x_1 = y_1^a u$, $a \geq 1$ (u は D_1 の一般の点で 0 にならない正則関数) と表される．$a = \nu_{D_1}(f^*x_1)$ となることに注意.

定義 5.1.3 $a > 1$ のとき f は D_1 で**分岐している** (ramify) といい D_1 を**分岐因子** (ramification divisor) とよぶ．このとき D_2 を**分岐因子** (branch divisor) とよぶこともある．a を f の D_1 における**分岐指数** (ramification index) とよぶ.

注意 広義有限射 $f : Y \to X$ に対し分岐因子は有限個しかないことが知られている．([Ha IV, 2.2] の曲線についての証明と同様に示される)

特に $f: Y \to X$ が $\mathbb{C}$ 上の非特異多様体間の有限射である場合，分岐因子を持たないこととétale 射であることは同値 ([SGA XI,3, 13, i])．またこれは任意の $x \in X$ に対して $f^{-1}(x)$ が被約ということと同値である ([Mu, III, §5, Th4])．このとき $f^*\omega_X = \omega_Y$ であることに注意する．

定義 5.1.4　X を非特異代数多様体，D を X 上の因子とする．D が点 x で**正規交差** (normal crossing) であるとは x での X の正則パラメータ系 $x_1, \cdots, x_n$ が存在してその一部の積 $x_1 \cdot \cdots \cdot x_k = 0$ で D が定義されている場合をいう．

ここで広義有限射 $f: Y \to X$ に対して K_Y と K_X の差を正規交差因子を含めて記述しよう．

定理 5.1.5　(対数的分岐公式)　$f: Y \to X$ を非特異代数多様体の間の広義有限射とする．D, $E = f^{-1}(D)_{\mathrm{red}}$ をそれぞれ X, Y 上の正規交差因子とする．ただし A_{red} は A に台をもつ因子で係数がすべて 1 のものとする．f を E の外では分岐因子がないと仮定すると

$$K_Y + E = f^*(K_X + D) + R$$

ここで R は f の例外集合上の非負係数の因子．

［証明］ E_i を E の既約成分とする．$f(E_i)$ の一般の点 x の近傍で $f(E_i)$ は X の非特異閉部分多様体となっているので 4.3.4 により X の正則パラメータ系 $x_1, \cdots, x_n$ が存在し，$f(E_i)$ はその一部を用いて $x_1 = \cdots = x_r = 0$ $(r \geq 1)$ で定義され D は $x_1 \cdot \cdots \cdot x_s = 0$ $(s \leq r)$ で定義されているとして良い．$f^{-1}(x)$ の一般の点 y の近傍で E_i は $y_1 = 0$ で定義されているとすると，

$$f^* x_i = y_1^{a_i} u_i$$

と表される．ここで u_i は y の近傍で y_1 で割れない正則関数で，$i = 1, \cdots, r$ に対しては $a_i \geq 1$, $i = r+1, \cdots, n$ に対しては $a_i = 0$. 有理形式 $\theta := \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{x_1 \cdot \cdots \cdot x_s}$ に対して $\nu_{E_i}(f^*\theta) \geq -1$ となり，特に E_i が例外因子でない場合は $= -1$ が成

立することを示す.

$$f^*\theta = \frac{dy_1^{a_1}u_1 \wedge \cdots \wedge dy_1^{a_r}u_r \wedge du_{r+1} \wedge \cdots \wedge du_n}{y_1^{a_1+\cdots+a_s}u_1 \cdots u_s}$$
$$= y_1^{\sum_{i=1}^r a_i - \sum_{i=1}^s a_i - 1}\theta'$$

ただし θ' は E_i の一般の点で正則な形式.

したがって $\nu_{E_i}(f^*\theta) \geq \sum_{i=1}^r a_i - \sum_{i=1}^s a_i - 1 \geq -1$. ここで特に E_i が例外因子でない場合は, $r = s = 1$ で $y_1, u_2, \cdots, u_n$ は y での正則パラメータと思って良いので $\nu_{E_i}(\theta') = 0$ となり, したがって $\nu_{E_i}(f^*\theta) = -1$.

定理 5.1.6 (分岐公式) $f : Y \to X$ を非特異代数多様体の間の広義有限射とする. E_i $(i = 1, \cdots, t)$ を f の既約な例外因子と分岐因子とし, $r_i := \dim E_i - \dim f(E_i)$ とする. このとき

$$K_Y = f^*K_X + \sum_{i=1}^t m_i E_i, \ (m_i \geq r_i)$$

と表される.

[証明] $f(E_i)$ の一般の点 x をとり, 5.1.5 の証明と同じ記号を用いよう. $f(E_i)$ は $x_1 = \cdots = x_r = 0$ で定義され, E_i は $y_1 = 0$ で定義されているので $r_i = r - 1$. また $f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = y_1^{a_1+\cdots+a_r-1}\theta'$ ($a_i \geq 1$, θ' は正則) となるので $\nu_{E_i}\bigl(f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)\bigr) \geq a_1 + \cdots + a_r - 1 \geq r - 1$.

例 5.1.7 X を n 次元非特異代数多様体, $Z \subset X$ を既約な s-次元非特異閉部分多様体とする. $b : Y := B_Z(X) \to X$ を Z を中心とする blow up, E をその例外因子とすると, E は既約になり $K_Y = b^*K_X + (n - s - 1)E$ となる.

実際これは任意の $x \in Z$ に対し x の十分小さい近傍について主張を示せば十分であるので X をアフィン多様体としよう. x での X の正則パラメータ $x_1, \cdots, x_n$ を適当に選べば, 4.3.4 より Z は $x_{s+1} = \cdots = x_n = 0$ で定義されている. よって Y は $\{V_j\}_{j=s+1}^n$ をアフィン開被覆にもち, V_j のアフィン環は R 上の多項

式環 $R\left[\frac{x_{s+1}}{x_j},\cdots,\frac{x_n}{x_j}\right]$, ただし R は X のアフィン環となっている．各 V_j の上で E は $I(Z)$ で定義されるので $E\cap V_j$ のアフィン環は $R/I(Z)\left[\frac{x_{s+1}}{x_j},\cdots,\frac{x_n}{x_j}\right]$ となり，貼り合わせを見ると $E\cong Z\times\mathbb{P}^{n-s-1}$ で当然既約となる．さて次に $y\in b^{-1}(x)$ をとると，$x_1,\cdots,x_s,x_j,\frac{x_{s+1}}{x_j},\cdots,\frac{x_{j-1}}{x_j},\frac{x_{j+1}}{x_j},\cdots,\frac{x_n}{x_j}$ が Y の y での正則パラメータになるので，

$$
\begin{aligned}
&b^*(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n)\\
&\quad= dx_1\wedge\cdots\wedge dx_s\wedge dx_j\wedge d\left(x_j\frac{x_{s+1}}{x_j}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(x_j\frac{x_n}{x_j}\right)\\
&\quad= x_j^{n-s-1}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_s\wedge dx_j\wedge d\left(\frac{x_{s+1}}{x_j}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{x_n}{x_j}\right)
\end{aligned}
$$

系 5.1.8　$f:Y\to X$ を非特異代数多様体の間の広義有限射とする．すると分岐因子に含まれない f の例外集合の既約成分はすべて余次元 1, すなわち素因子になる．

［証明］ $C\subset Y$ を例外集合の既約成分で 余次元 ≥ 2 なるものとする．例外集合の成分であるから $\dim f(C)<\dim C$. さて，$\sigma:\widetilde{Y}\to Y$ を C を中心とする blow up とし，E_C を $\sigma(E_C)=C$ となる σ の例外因子とする．C は一般の点では非特異として良いので 5.1.7 より

$$
\begin{aligned}
K_{\widetilde{Y}} &= \sigma^*K_Y+(n-\dim C-1)E_C+(\text{他の因子})\\
&= \sigma^*f^*K_X+(n-\dim C-1)E_C+(\text{他の因子})
\end{aligned}
$$

となり，$f\circ\sigma$ の例外因子 E_C の係数は $n-\dim C-1<n-\dim f(C)-1$ となり 5.1.6 に矛盾する．

これは一般の X,Y については成立しない．実際 X に特異点がある場合，例外集合の余次元が 2 以上になる例が存在する．(7 章参照)

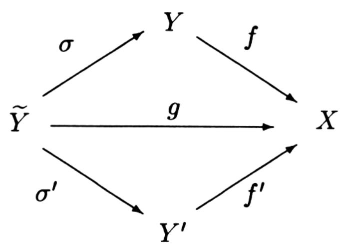
次に特異点の“良い”解消を定義しよう．3.3.4 より $\mathbb{C}$ 上では“良い”解消は常に存在する．

定義 5.1.9　X を多様体とするとき $f: Y \to X$ が特異点の**良解消** (good resolution) (または特異点の**広義の良解消**) とは f が特異点の解消 (または広義の解消) であって例外集合が，正規交差因子になっている場合をいう．

分岐公式，対数的分岐公式により次の不変性定理が導かれる．この系は対数的標準特異点，対数的端末特異点を定義するうえでも，多重種数を定義するうえでも基本的となってくる．

系 5.1.10　(i)　X を正規多様体 $f: Y \to X$ を X の特異点の広義の解消とする．任意の自然数 m に対して $f_*\mathcal{O}_Y(mK_Y)$ は連接的 $\mathcal{O}_X$-加群になり f の選び方に依存しない．
(ii)　X を正規多様体 $f: Y \to X$ を X の特異点の広義の良解消，E を全例外因子とする．このとき $f_*\mathcal{O}_Y(mK_Y + mE)$ および $f_*\mathcal{O}_Y(mK_Y + (m-1)E)$ は連接的 $\mathcal{O}_X$-加群になり，f の選び方に依存しない．

[証明]　(i), (ii) の連接性は，Grauert の固有連接定理 [Gr1], [EGA III, 3.2.1] によりしたがう．一意性については，2 つの広義の解消 (または広義の良解消) $f: Y \to X$, $f': Y' \to X$ が与えられたとき，新たな広義の解消 (または広義の良解消) $g: \widetilde{Y} \to X$ が存在して，次の可換図式が成立する．



これは $\widetilde{Y}$ としてファイバー積 $Y' \times_X Y$ の特異点解消をとれば良い．したがって，2 つの広義の解消 (または広義の良解消) f, f' が $f' = f \circ \sigma : Y' \to Y \to X$ なる関係をもっているときに，$f_*\mathcal{O}_Y(mK_Y) = f'_*\mathcal{O}_{Y'}(mK_{Y'})$ (または $f_*\mathcal{O}_Y(mK_Y + (m-1)E) = f'_*\mathcal{O}_{Y'}(mK_{Y'} + (m-1)E')$, etc.) を示せば十分．

(i)　$f' = f \circ \sigma : Y' \to X$, $f : Y \to X$ を X の特異点の広義の解消とする．$\sigma : Y' \to Y$ は 5.1.6 の仮定をみたしているので $\{E_i\}$ を σ の例外因子とすると，

$$\begin{aligned}\sigma_*\mathcal{O}_{Y'}(mK_{Y'}) &= \sigma_*\Big(\sigma^*\mathcal{O}_Y(mK_Y) \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{O}_{Y'}\Big(\sum m_i E_i\Big)\Big) \\ &= \mathcal{O}_Y(mK_Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \sigma_*\mathcal{O}_{Y'}\Big(\sum m_i E_i\Big)\end{aligned}$$

ここで $\sigma_*\mathcal{O}_{Y'}(\sum m_i E_i) = \mathcal{O}_Y$．実際 5.1.6 より $m_i > 0$ $({}^\forall i)$ なので $\supset$ は明らか．また左辺の任意の元は例外因子の外では正則な関数だから Y の正規性と 3.1.11,(v) より Y 上で正則となり $\subset$ が証明された．これにより $f_*\sigma_*\mathcal{O}(mK_{Y'}) = f_*\mathcal{O}_Y(mK_Y)$.

(ii)　$f' = f \circ \sigma$, $Y' \to X$, $f : Y \to X$ を特異点の広義の良解消とする $E \subset Y$ を f の全例外因子 $E' \subset Y'$ を f' の全例外因子とする．${E'}_0 = \sigma^{-1}(E)_{\mathrm{red}}$ として 5.1.5 より $mK_{Y'} + mE'_0 = \sigma^*(mK_Y + mE) + mR$.

ところで因子 σ^*E における各素因子 E_i の係数は E_i が σ の例外因子でない場合は 1 で σ の例外因子の場合は ≥ 1 である．よって上式の両辺から $\sigma^*(E)$ を引くと

$$mK_{Y'} + (m-1)E'_0 - R' = \sigma^*\big(mK_Y + (m-1)E\big) + mR$$

となる．ただし R, R' は σ の例外集合上の非負係数の因子．$E' \geq E'_0$ であるから両辺に $(m-1)(E' - E'_0)$ を加え R' を移項することにより

$$mK_{Y'} + (m-1)E' = \sigma^*\big(mK_Y + (m-1)E\big) + R''$$

を得る．ここで R'' が σ の例外集合上の非負係数の因子であることより (i) と同様にして $f_*\sigma_*\mathcal{O}_{Y'}\big(mK_{Y'} + (m-1)E'\big) = f_*\mathcal{O}_Y\big(mK_Y + (m-1)E\big)$ を得る．$mK + mE$ についても同様.

ここで，後にしばしば用いられる重要な消滅定理を紹介しよう．

定理 5.1.11　(Grauert-Riemenschneider の消滅定理 [GR])　$f : Y \to X$ を正規特異点 (X, x) の広義の解消とすると $R^i f_*\mathcal{O}_Y(K_Y) = R^i f_*\omega_Y = 0$, $i > 0$ が成立する．

5.2 標準特異点，端末特異点，有理特異点

ここでは特異点は必ずしも孤立ではないものを扱う．ここで扱う標準特異点，端末特異点，有理特異点は，微分形式に関しては，非特異に近い性質をもっているものである．

定義 5.2.1 正規特異点 (X, x) が **$\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点**であるとは x の近傍 X で，ある整数 r が存在し，$\omega_X^{[r]}$ が可逆層になっている場合である．このような正の整数 r の中で最小の値を (X, x) の**指数** (index) とよぶ．またこのとき (X, x) を **r-Gorenstein 特異点**ということもある．1-Gorenstein でかつ Cohen-Macaulay であるような特異点を **Gorenstein 特異点**とよぶ．これは $\mathcal{O}_{X,x}$ が Gorenstein 環 ([Ma2, p.142]) であることと同値である．

$\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点に対し標準被覆を定義しよう．

定義 5.2.2 r-Gorenstein 特異点 (X, x) に対し x のアフィン近傍 X を十分小さくとれば，ある $\theta \in \Gamma(X, \omega_X^{[r]})$ が存在して $\omega_X^{[r]} = \mathcal{O}_X \cdot \theta \cong \mathcal{O}_X$ となっている．$\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{O}_X \oplus \omega_X \oplus \cdots \oplus \omega_X^{[r-1]}$ とし，$\mathcal{A}$ に $\mathcal{O}_X$-代数の構造を入れよう．$\lambda \in \omega^{[i]}, \mu \in \omega^{[j]}$ に対し，積 $\lambda \cdot \mu$ を，次のように定義する．

$$
\begin{array}{lll}
i + j \leq r - 1 & \text{の場合は} & \lambda \cdot \mu = \mathrm{image}(\lambda \otimes \mu) \in \omega_X^{[i+j]} \\
i + j \geq r & \text{の場合は} & \lambda \cdot \mu = \theta^{-1} \cdot \mathrm{image}(\lambda \otimes \mu) \in \omega_X^{[i+j-r]}
\end{array}
$$

ここで $\mathrm{image}(\lambda \otimes \mu)$ は $\omega_X^{[i]} \otimes \omega_X^{[j]} \to \omega_X^{[i+j]}$ による $\lambda \otimes \mu$ の像を表す．

環 $A = \Gamma(X, \mathcal{A})$ は $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ 上の有限生成代数であるから $\mathbb{C}$ 上でも有限生成となる．A をアフィン環にもつアフィン多様体を $\overline{X}$ とし，自然な射 $\rho : \overline{X} \to X$ を**標準被覆** (canonical cover) とよぶ．このとき $\rho_* \mathcal{O}_{\overline{X}} = \mathcal{A}$ なる関係がある．

命題 5.2.3 r-Gorenstein 特異点 (X, x) の標準被覆 $\rho : \overline{X} \to X$ は次の性質をもつ

(1) ρ は分岐因子をもたない有限射である．

(2)　ρ は群 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ による商写像である．

(3)　$\overline{X}$ は正規でさらに 1-Gorenstein 特異点のみをもつ．

［証明］(1)　一般に代数多様体の射 $f : Y \to X$ が有限射であるということは，X のアフィン開被覆 $\{U_i\}_i$ が存在して $\{f^{-1}(U_i)\}$ も Y のアフィン開被覆となり，$\Gamma(f^{-1}(U_i), \mathcal{O}_Y)$ が $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ 上有限生成加群になることと同値であるので，$\overline{X}, \rho$ の構成により ρ は有限射．また，十分小なる $U \subset X_{\mathrm{reg}}$ に対し $\mathcal{A}|_U \cong \mathcal{O}_U[T]/(T^r - u)$, ($u$ は $\mathcal{O}_X$ の単元) となるので U 上で不分岐である．

(2)　群 $G = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ の生成元を σ とする．$\mathcal{A}$ への作用を次のように定義する：$\forall\eta = \eta_0 + \eta_1 + \cdots + \eta_{r-1} \in \mathcal{A}$, $\eta_i \in \omega_X^{[i]}$ に対し $\eta^\sigma = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \cdots + \varepsilon^{n-1}\eta_{r-1}$, ただし ε は 1 の原始 n 乗根．するとこの作用による不変部分環は $\mathcal{A}^G = \mathcal{O}_X$ である．(6.4.2 参照)

(3)　$V = \rho^{-1}(X_{\mathrm{reg}})$ は非特異開集合で，$\mathrm{codim}_{\overline{X}}\overline{X} \setminus V \geq 2$.　さらに $\Gamma(V, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = \Gamma(X_{\mathrm{reg}}, \mathcal{A}) = \Gamma(X_{\mathrm{reg}}, \mathcal{O}_X) \oplus \cdots \oplus \Gamma(X_{\mathrm{reg}}, \omega_X^{[r-1]})$. ここで $\omega_X^{[i]}$ ($i = 0, \cdots, r-1$) は，因子的なので $\Gamma(X_{\mathrm{reg}}, \omega_X^{[i]}) = \Gamma(X, \omega_X^{[i]})$. よって $\Gamma(V, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = \Gamma(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ となり，3.1.11,(v) より $\overline{X}$ は正規．ρ は X_{reg} 上で不分岐であるから $\omega_{\overline{X}}|_V = \rho^*(\omega_X|_{X_{\mathrm{reg}}})$, よって $\Gamma(\overline{X}, \omega_{\overline{X}}) = \Gamma(V, \omega_{\overline{X}}|_V) = \Gamma(X_{\mathrm{reg}}, \omega_{X_{\mathrm{reg}}} \otimes \mathcal{A}) = \Gamma(X_{\mathrm{reg}}, \omega_{X_{\mathrm{reg}}} \oplus \cdots \oplus \omega_{X_{\mathrm{reg}}}^{[r]}) \cong \Gamma(X, \mathcal{A}) = \Gamma(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$. これより $\omega_{\overline{X}}$ は可逆である．

定義 5.2.4　正規特異点 (X, x) が**標準** (canonical) 特異点 (または**端末** (terminal) 特異点) であるということを，次の二条件で定義する．

(1)　(X, x) は $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点である．

$f : Y \to X$ を特異点の任意の広義の解消，$E_1, \cdots, E_r$ を f の既約な例外因子の全体とする．

(2)　$\mathrm{Div}\,(Y) \otimes \mathbb{Q}$ において $K_Y = f^*K_X + \sum_{i=1}^r m_iE_i$ と表したとき，すべての i について $m_i \geq 0$ (または $m_i > 0$) が成立する．

例 5.2.5　分岐公式 5.1.6 により非特異点は，端末特異点であることがわかる．

命題 5.2.6 一つの広義の解消 $f : Y \to X$ について 5.2.4,(2) が成立すれば，任意の広義の解消に対しても成立する．

[証明] もう一つの広義の解消 $f' : Y' \to X$ が $f' = f \circ \pi$, $\pi : Y' \to Y$ と分解されているときに示せば十分．Y は非特異であるから 5.2.5 より，$K_{Y'} = \pi^* K_Y + \sum_{j=1}^{s} n_j E_j$, $n_j > 0$ また f について (2) が成立しているとすると，$K_Y = f^* K_X + \sum_{i=1}^{r} m_i E_i$, $m_i \geq 0$ (または $m_i > 0$) だからこれを $K_{Y'}$ の式に代入すれば，すべての既約例外因子の係数 ≥ 0 (または > 0) が得られる．f' について (2) が成立している場合 f についても成立することは明らか．

定義 5.2.7 正規特異点 (X, x) が**対数的標準** (log-canonical) **特異点** (または**対数的端末** (log-terminal) **特異点**) であるということを次の二条件で定義する．

(1) (X, x) は $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点である．

$f : Y \to X$ を特異点の任意の広義の良解消，$E_1, \cdots, E_r$ を f の既約な例外因子の全体とする．

(2) $\mathrm{Div}\,(X) \otimes \mathbb{Q}$ において $K_Y = f^* K_X + \sum m_i E_i$ と表したとき，すべての i について $m_i \geq -1$ (または $m_i > -1$) が成立する．

命題 5.2.8 正規特異点 (X, x) に対し，一つの広義の良解消 $f : Y \to X$ について，5.2.7,(2) が成立すれば，任意の広義良解消についても成立する．

[証明] もう一つの広義の良解消 $f' : Y' \to X$ が $f' = f \circ \pi$, $\pi : Y' \to Y$ と分解されているときに示せば十分．f の例外因子を $E_1, \cdots, E_r$, π の例外因子を $E_{r+1}, \cdots, E_{r+s}$ とし，E_i $(i = 1, \cdots, r)$ の Y' での狭義の逆像を同じ E_i で表すことにする．$\pi^* \left(\sum_{i=1}^{r} E_i\right)_{\mathrm{red}} \leq \sum_{i=1}^{r+s} E_i$ より対数的分岐公式 5.1.5 により，$K_{Y'} + \sum_{i=1}^{r+s} E_i = \pi^* \left(K_Y + \sum_{i=1}^{r} E_i\right) + \sum_{j=1}^{s} n_j E_{r+j}$, $n_j \geq 0$. 5.1.6 より特に $\pi(E_{r+j}) \not\subset \bigcup_{i=1}^{r} E_i$ なら $n_j > 1$ となることに注意．f が (2) をみたしているとすると $K_Y = f^* K_X + \sum_{i=1}^{r} m_i E_i$, $m_i \geq -1$ (または $m_i > -1$) よって $K_Y + \sum_{i=1}^{r} E_i = f^* K_X + \sum_{i=1}^{r} r_i E_i$, $r_i \geq 0$ (または $r_i > 0$) となり上式に代入することにより，$K_{Y'} = \pi^* f^* K_X + \sum_{i=1}^{r+s} m_i E_i$, $m_i \geq -1$ (または $m_i > -1$)

を得る．f' について (2) が成立しているとすると f についても (2) が成立していることは明らか．

上記で与えた四種類の特異点の関係は，定義より明らかに以下のようになっている．

端末特異点 $\Rightarrow$ 標準特異点 $\Rightarrow$ 対数的端末特異点 $\Rightarrow$ 対数的標準特異点．

2つの特異点の間に有理射があるとき一方の特異点の性質は他方にどのように影響を与えるのであろうか．分岐因子が存在しない場合に次の定理がある．

定理 5.2.9　X, Y を正規な多様体，$\pi : Y \to X$ を分岐因子の存在しない有限射とする．このとき次が成立する．

(i)　X が標準特異点 (または端末特異点) のみをもてば，Y も標準特異点 (または端末特異点) のみをもつ．

(ii)　Y が対数的標準特異点 (または対数的端末特異点) のみをもつことと，X が対数的標準特異点 (または対数的端末特異点) のみをもつことは同値である．

[証明]　分岐因子が存在しないので，codim 2 の閉部分集合を除いたところで $\omega_Y \simeq \pi^*\omega_X$．これより X が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 的であることと，Y がそうであることは同値．実際まず，X が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 的ならば，Y も $\mathbb{Q}$-Gorenstein 的になることは明らか．逆を示そう．X, Y がアフィンであって $\omega_Y^{[m]} \simeq \mathcal{O}_Y$ と仮定したとき $\omega_X^{[mr]} \simeq \mathcal{O}_X$ なる r が存在することを示せばよい．$\pi \circ \sigma : \overline{Y} \to X$ を $\pi : Y \to X$ のガロワ閉包とする: すなわち，関数体 $k(Y)$ の $k(X)$ 上のガロワ閉包を K とし，K の中で Y のアフィン環 $A(Y)$ の整閉包 $\overline{A(Y)}$ をとる; $\overline{A(Y)}$ は $A(Y)$ 上有限生成加群になることに注意 ([ZS, I, p.267]); $\overline{A(Y)}$ をアフィン環としてもつアフィン多様体を $\overline{Y}$ とする; 自然な有限射 $\sigma : \overline{Y} \to Y$ が存在し，$\pi \circ \sigma : \overline{Y} \to X$ を π のガロワ閉包とよぶ．ここで $G = \mathrm{Gal}\bigl(K/k(X)\bigr)$ は $\overline{A(Y)}$ に作用しているので，$\overline{Y}$ にも自然に作用している．また，X には自明に作用しているので，$\pi \circ \sigma : \overline{Y} \to X$ は G による商 $\lambda : \overline{Y} \to \overline{Y}/G$ を経由

して $\pi\circ\sigma=\tau\circ\lambda$ と分解する．$\overline{Y}/G$ の関数体は，$K^G=k(X)$ であるから $\tau:\overline{Y}/G\to X$ は双有理的．しかし $\pi\circ\sigma=\tau\circ\lambda$ は有限射であるから τ も有限射にならねばならず Zariski の主定理 [Ha2, V,5.2] より τ は同型となる．

さて $\omega_Y^{[m]}\simeq\mathcal{O}_Y$ より Y 上で codim 2 の閉集合を除いた Y_0 において $\pi^*\omega_X^{\otimes m}|_{Y_0}\simeq\omega_{Y_0}^{\otimes m}\simeq\mathcal{O}_{Y_0}$ としてよい．よって $\overline{Y}_0=\sigma^{-1}(Y_0)$ とすると，$\sigma^*\pi^*\omega_X^{\otimes m}|_{\overline{Y}_0}\simeq\mathcal{O}_{\overline{Y}_0}$．したがって $\Gamma(\overline{Y}_0,\sigma^*\pi^*\omega_X^{\otimes m})$ の元 θ で $\overline{Y}_0$ 上で零点をもたないものがある．$\overline{\theta}:=\otimes_{g\in G}\theta^g\in\Gamma(\overline{Y}_0,\sigma^*\pi^*\omega_X^{\otimes mr})=\Gamma(\overline{Y}_0,\lambda^*\tau^*\omega_X^{\otimes mr})$, $(r=\#G)$ をとると，$\overline{\theta}$ は G の作用で不変であるから，$\Gamma(\overline{Y}_0/G,\tau^*\omega_X^{\otimes mr})$ の元からきている．$\overline{\theta}$ は $\overline{Y}_0/G$ でも零点をもたないので $\tau^*\omega_X^{\otimes mr}|_{\overline{Y}_0/G}\simeq\mathcal{O}_{\overline{Y}_0/G}$ よって X 上 codim 2 の閉集合を除いた X_0 上で $\omega_X^{\otimes mr}|_{X_0}\simeq\mathcal{O}_{X_0}$．これより $\omega_X^{[mr]}\simeq\mathcal{O}_X$．

さて r を X,Y の指数の公倍数とすれば $\omega_Y^{[r]}=\pi^*\omega_X^{[r]}$．よって $\mathbb{Q}$-因子として $K_Y=\pi^*K_X$．可換図式を考える：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{\ \widetilde{\pi}\ } & \widetilde{X} \\ g\downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\ \pi\ } & X \end{array}$$

ここで f,g はそれぞれ X,Y の特異点の広義の良解消で，$D\subset\widetilde{Y}$ を g の既約な例外因子とし，

$$K_{\widetilde{Y}}=g^*K_Y+aD+(\text{他の因子})$$

と表す．今 $\widetilde{\pi}(D)$ が $\widetilde{X}$ の因子になるとし，

$$K_{\widetilde{X}}=f^*K_X+b\widetilde{\pi}(D)+(\text{他の因子})$$

と表したとき $\pi^*K_X=K_Y$ と対数的分岐公式 5.1.5 より $a+1=e(b+1)$．ここで e は D での分岐指数．したがって，次の関係が得られる．$a\geq -1\iff b\geq -1$, $a>-1\iff b>-1$, $b\geq 0\Longrightarrow a\geq 0$, $b>0\Longrightarrow a>0$．このうち $a\geq -1\Longrightarrow b\geq -1$, $a>-1\Longrightarrow b>-1$ から Y が対数的標準 (または対数的端末) 特異点のみをもつなら X もそうであることが出る．つぎに $\widetilde{\pi}(D)$ が因子でないとする．$K_{\widetilde{X}}=f^*K_X+\sum b_iE_i$ と表して，すべての E_i に対し $b_i\geq 0$

とすると分岐公式 5.1.6 より $a > 0$ を得る．また $b_i \geq -1$ (または $b_i > -1$) とすると対数的分岐公式 5.1.5 により $a \geq -1$ (または $a > -1$) を得る．

さて次に有理特異点の定義をしよう．

定義 5.2.10　正規特異点 (X, x) が任意の広義の解消 $f : Y \to X$ に対して $R^i f_* \mathcal{O}_Y = 0$ $(i > 0)$ をみたしているとき，**有理特異点** (rational singularity) という．

さて Elkik は [El2] において標準特異点は有理特異点であることを示した．ここではこれを藤田による次の消滅定理を用いて証明しよう．なおこの消滅定理は川又-Viehweg の消滅定理を用いて示されるものである．

定理 5.2.11　(藤田 [Fu])　$f : Y \to X$ を特異点の広義の解消とする．Y 上のカルティエ因子 L に対し，次のような Y 上の因子 D, D^*, E が存在するとする．ただし D の既約因子による表示が $D = \sum m_i E_i$ のとき $[D]$ を $\sum [m_i] E_i$ で定義する：

(i)　$[D] = [D^*] = 0$.

(ii)　E は有効な例外因子.

(iii)　$L + E - K_Y - D$, $-L - D^*$ がともに f-nef.

このとき $R^i f_* \mathcal{O}_Y(L) = 0$, $i > 0$ が成立する．

定理 5.2.12　対数的端末特異点は有理特異点である．よって特に標準特異点は有理特異点である．

［証明］　$f : Y \to X$ を広義の良解消とすると仮定より $K_Y = f^* K_X + \sum m_i E_i$, $m_i > -1$. ここで有理数 m_i に対し $m_i' := \lceil m_i \rceil - m_i$ とおく．ただし $\lceil m_i \rceil$ は m_i の切り上げを意味する．$E = \sum \lceil m_i \rceil E_i$, $D = \sum m_i' E_i$, $D^* = 0$, $L = 0$ とおくと 5.2.11 の条件がみたされる．よって $R^i f_* \mathcal{O}_Y = 0$ $(i > 0)$.

次の定理により有理特異点はある 1 つの広義の特異点解消 $f : Y \to X$ に対

して $R^i f_* \mathcal{O}_Y = 0$ $(i > 0)$ が成立することと同値であることがわかる．

命題 5.2.13 正規特異点 (X, x) の 2 つの広義の解消 $f : Y \to X$, $f' : Y' \to X$ に対して $R^p f_* \mathcal{O}_Y \simeq R^p f'_* \mathcal{O}_{Y'}$ $({}^\forall p \in \mathbb{Z})$. 特に (X, x) が有理特異点であることと，ある広義の解消 $f : Y \to X$ に対し $R^i f_* \mathcal{O}_Y = 0$ $(i > 0)$ が成立することは同値である．

［証明］ 2 つの広義の解消 f, f' が $f' = f \circ \sigma$, $\sigma : Y' \to Y$ をみたす場合に示せばよい．Leray のスペクトル列 (2.6.9):

$$E_2^{p,q} = R^p f_* (R^q \sigma_* \mathcal{O}_{Y'}) \Longrightarrow E^{p+q} = R^{p+q} f'_* \mathcal{O}_{Y'}$$

を考える．Y は非特異であるので，5.2.5 と 5.2.12 により $q > 0$ に対して $R^q \sigma_* \mathcal{O}_{Y'} = 0$. よって $E_2^{p,q} = 0$ $(q \neq 0)$ となり 2.6.3 により $E_2^{p,0} \cong E^p$ となり $R^p f_* \mathcal{O}_Y \cong R^p f'_* \mathcal{O}_{Y'}$ を得る．

有理特異点の定義は一見微分形式とは無縁に見えるが実は，次の定理で関係づけられている．

定理 5.2.14 正規特異点 (X, x) に対して次は同値である．

(i) (X, x) は有理特異点

(ii) (X, x) は Cohen-Macaulay 的で広義の解消 $f : Y \to X$ に対し，自然な単射 $f_* \omega_Y \hookrightarrow \omega_X$ が同型になる．

［証明］ 2.5.10 の双対定理を $\mathcal{O}_Y$ に適用することにより

$$\text{(1)} \qquad \mathbb{R} f_* \left(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y, D_Y^{\cdot}) \right) \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X} (\mathbb{R} f_* \mathcal{O}_Y, D_X^{\cdot}).$$

Y は非特異なので Cohen-Macaulay 的であり，よって 2.5.12 により $D_Y^{\cdot} \cong \omega_Y[n]$. ただし $n = \dim_x X$. また Grauert-Riemenschneider の消滅定理 $R^i f_* \omega_Y = 0$, $i > 0$ により

$$\text{(2)} \qquad f_* \omega_Y[n] \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X} (\mathbb{R} f_* \mathcal{O}_Y, D_X^{\cdot}).$$

ここで (i) を仮定すると $\mathbb{R}f_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$. よって (2) は $f_*\omega_Y[n] \cong D^{\cdot}_X$ となるので，2.5.12 により X は Cohen-Macaulay 的で，しかも $f_*\omega_Y = \omega_X$.

逆に (ii) を仮定すると (2) の両辺の $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\ ,D^{\cdot}_X)$ をとることにより

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f_*\omega_Y[n], D^{\cdot}_X) \cong \mathbb{R}f_*\mathcal{O}_Y \tag{3}$$

を得るが，条件 (ii) より $f_*\omega_Y[n] \cong D^{\cdot}_X$. したがって (3) の左辺は $\mathcal{O}_X$ となり (i) を得る.

系 5.2.15　正規特異点 (X, x) が 1-Gorenstein であるとき次は同値である.

(i)　(X, x) は有理特異点

(ii)　(X, x) は標準特異点

［証明］ (ii) ⇒ (i) は 5.2.12.　(i) を仮定すると 5.2.14 により，広義特異点解消 $f : Y \to X$ に対し $f_*\omega_Y = \omega_X$. したがって $K_Y = f^*K_X + \sum m_i E_i$ と表したとき $m_i \geq 0$.

ここで川又-Viehweg の消滅定理の特別な場合を紹介しよう.

定理 5.2.16　([KMM1.2.6])　$f : Y \to X$ を固有射で Y が高々対数的端末特異点しか持たないとする．D を Y 上のヴェイユ因子で，$\mathbb{Q}$-カルティエ因子となっており $D - K_Y$ が $f-\mathrm{nef}$ とする．このとき次が成立する.

$$R^i f_*\mathcal{O}_Y(D) = 0 \quad (i > 0).$$

特に $X = \{1\text{ 点}\}$, $D - K_Y$ を豊富，Y を非特異としたものが小平の消滅定理である.

5.3　正規孤立特異点の分類

この節では (X,x) を $\mathbb{C}$ 上の代数多様体の孤立特異点の芽としよう．点 x の十分小さいアフィン近傍も X と表すことにする．ここでは 3 種類の多重種数 γ_m, δ_m, d_m を孤立特異点に対して定義し，その増大度によって特異点を大まかに分類する．

定義 5.3.1　(Knöller [Kn])　正規孤立特異点 (X,x) に対し

$$\gamma_m(X,x) := \dim_{\mathbb{C}} \omega_X^{[m]}/f_*(\omega_Y^{\otimes m}) \quad (m \in \mathbb{N})$$

ただし，$f: Y \to X$ は特異点 (X,x) の解消で $\dim_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての次元を表す．

ここで 5.1.10,(i) により層 $\omega_X^{[m]}/f_*(\omega_Y^{\otimes m})$ は解消 f の取り方によらない．また $\omega_X^{[m]}$; $f_*(\omega_Y^{\otimes m})$ はともに連接的 $\mathcal{O}_X$-加群であるからその商もそうなる．よって $\mathcal{O}_V := \mathcal{O}_X/\mathcal{A}_{nn}\big(\omega_X^{[m]}/f_*(\omega_Y^{\otimes m})\big)$ 上の有限生成加群であるが，$\mathcal{O}_V$ は x のみに台をもつ $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間になるので $\gamma_m(X,x)$ は有限の値になる．ここで $\mathcal{A}_{nn}(\mathcal{F})$ は $\mathcal{O}_X$-イデアル層で $\mathcal{A}_{nn}(\mathcal{F})(U) = \{f \in \Gamma(U,\mathcal{O}_X) \mid f\mathcal{F} = 0\}$ で定義される．

定義 5.3.2　(渡辺 [W1], 石井 [I7])　正規孤立特異点 (X,x), $m \in \mathbb{N}$ に対し

$$\delta_m(X,x) := \dim_{\mathbb{C}} \omega_X^{[m]}/f_*\big(\omega_Y^{\otimes m}\big((m-1)E\big)\big)$$
$$d_m(X,x) := \dim_{\mathbb{C}} f_*\omega_Y^{\otimes m}(mE)/f_*\big(\omega_Y^{\otimes m}((m-1)E)\big)$$

ただし $f: Y \to X$ は特異点 (X,x) の良解消で，E は f の全例外因子とする．$\omega_Y^{\otimes m}\big((m-1)E\big)$ は $\mathcal{O}_Y\big(mK_Y + (m-1)E\big)$ と同じものであることに注意する．

ここでも 5.3.1と同様に 5.1.10,(ii) を用いて δ_m, d_m は良解消の取り方に依存しないこと，$\delta_m(X,x)$, $d_m(X,x)$ の値は有限であることがわかる．

このようにして 1 つの孤立特異点 (X,x) に対して 3 種の数列 $\{\gamma_m(X,x)\}_{m=1}^{\infty}$,

$\{\delta_m(X,x)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{d_m(X,x)\}_{m=1}^{\infty}$ が得られた．次に数列の増大度という概念を準備しよう．

定義 5.3.3　実数列 $a=\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ に対して次のような実数値 k が存在するとき a_m は **k 位で増大する** (grows in order k) といい，$a_m \sim m^k$ と書く．

$$0 < \limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{m^k} < \infty$$

注意 5.3.4　上記のような k はどんな数列に対しても存在するというわけではない．たとえば $a_m = \log m$ とすると $k \leq 0$ では $\limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{m^k} = \infty$ であるが，$k > 0$ とすると $\limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{m^k} = 0$ となってしまう．

まず数列 $\{\gamma_m(X,x)\}_{m=1}^{\infty}$ について考えてみよう．次の定理は 2 次元の場合は，[Kn] において，一般次元の場合は [I7] において証明された．

定理 5.3.5　任意の n 次元の正規孤立特異点 (X,x) に対して次のいずれかが成立する．

(i)　すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して，$\gamma_m(X,x) = 0$

(ii)　$\gamma_m(X,x) \sim m^n$

他の多重種数 $\delta_m(X,x)$, $d_m(X,x)$ については次の定理が [I7] に於て示された．

定理 5.3.6　任意の n 次元の正規孤立特異点 (X,x) に対して次のいずれかが成立する．

(i)　すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して $\delta_m(X,x) = d_m(X,x) = 0$

(ii)　$\delta_m(X,x) = d_m(X,x) \sim m^k$ ただし $k = 0, 1, 2, \cdots n-2$

(iii)　$\delta_m(X,x) \sim m^n$ かつ $d_m(X,x) \sim m^{n-1}$

定義 5.3.7　5.3.5,(i) 5.3.6,(i) の場合，それぞれ $\kappa_\gamma(X,x) = -\infty$, $\kappa_d(X,x) = \kappa_\delta(X,x) = -\infty$ と表す．5.3.5,(ii), 5.3.6,(ii) (iii) の場合，$\gamma_m(X,x)$, $\delta_m(X,x)$,

$d_m(X,x)$ の増大の位数を，それぞれ $\kappa_\gamma(X,x)$, $\kappa_\delta(X,x)$, $\kappa_d(X,x)$ で表す.

定理5.3.5により n 次元正規孤立特異点は κ_γ の値で大きく2つの種類に分類され，定理5.3.6により κ_δ の値で $n+1$ 個の種類に分類されることがわかった. 次の命題は $\mathbb{Q}$-Gorenstein 孤立特異点についてはそのうち3種類しか出てこないことを示している. 定理5.3.6は実はこの命題の証明を利用して証明された.

命題 5.3.8 (泊-渡辺 [TW]) (X,x) を n 次元 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 孤立特異点とすると $\kappa_\delta(X,x)=-\infty$ または 0 または n となる.

5.3.9 任意の特異点の良解消 $f:Y\to X$ に対して $f_*\omega_Y^{\otimes m}\subset f_*\omega_Y^{\otimes m}\big((m-1)E\big)$ であるので $\gamma_m(X,x)\geq\delta_m(X,x)$. 特に $m=1$ の時は $\gamma_1(X,x)=\delta_1(X,x)$. またこのときこの値は，次の不変数と関連がある.

定義 5.3.10 任意の n 次元正規孤立特異点 (X,x) に対し

$$p_g(X,x):=\dim_{\mathbb{C}} R^{n-1}f_*\mathcal{O}_Y$$

と定義し，これを (X,x) の**幾何種数** (geometric genus) とよぶ. ここで $f:Y\to X$ は特異点 (X,x) の広義の解消.

これは広義の特異点解消 f のとり方に依らないことは5.2.13で示されている.

命題 5.3.11 正規孤立特異点 (X,x) に対し

$$p_g(X,x)=\gamma_1(X,x)=\delta_1(X,x)$$

[証明] $f:Y\to X$ を (X,x) の特異点解消とし，E を Y 上の例外集合とする. $x\in X$ の任意の近傍 V に対して $U:=f^{-1}(V)$ 上で次の完全列がある.

$$0=\Gamma_E(\omega_Y)\to\Gamma(U,\omega_Y)\to\Gamma(U-E,\omega_Y)\to H^1_E(\omega_Y)\to H^1(U,\omega_Y)$$

したがって

$$0 \to f_*\omega_Y \to \omega_X \to H^1_E(\omega_Y) \to R^1 f_*\omega_Y$$

は完全列となるが Grauert-Riemenschneider 消滅定理より $R^1 f_*\omega_Y = 0$ よって $H^1_E(\omega_Y) = \omega_X / f_*\omega_Y$. ここで局所双対定理 (2.5.15) $\dim R^{n-1} f_*\mathcal{O}_Y = \dim H^1_E(\omega_Y)$ より $p_g(X,x) = \gamma_1(X,x)$.

前節で定義した特異点の性質と多重種数の増大度とは以下のような関係である.

命題 5.3.12　$\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点 (X,x) について次が成立する.

(i)　(X,x) が標準特異点 $\Longleftrightarrow \kappa_\gamma(X,x) = -\infty$

(ii)　(X,x) が対数的端末特異点 $\Longleftrightarrow \kappa_\delta(X,x) = -\infty$

(iii)　(X,x) が対数的標準特異点で対数的端末特異点でない $\Longleftrightarrow \kappa_\delta(X,x) = 0$.
さらに詳しく指数 r として $\delta_m(X,x) = 1$ $(r|m)$, $\delta_m(X,x) = 0$ $(r \not| m)$.

［証明］ 特異点 (X,x) の指数を r とする. $f: Y \to X$ を特異点 (X,x) の解消とし, $K_Y = f^*K_X + \sum m_i E_i$ とする.

(i)　(X,x) が標準特異点ならば, $r|m$ なるすべての m に対し $\omega_Y^{\otimes m} = f^*\omega_X^{[m]}(m\sum m_i E_i)$, $m_i \geq 0$ であるので

$$f_*\omega_Y^{\otimes m} \supset f_*f^*\omega_X^{[m]} = \omega_X^{[m]}.$$

よってこのような m については $\gamma_m(X,x) = 0$. もしある $s \in \mathbb{N}$ に対し $\gamma_s(X,x) \neq 0$ とすると $\theta \in \omega_X^{[s]}, \theta \notin f_*\omega_Y^s$ なる θ が存在する. すると $\nu_{E_i}(\theta) < 0$ なる素因子 E_i が存在するので $\nu_{E_i}(\theta^r) < 0$. よって $\theta^r \notin f_*\omega_Y^{rs}$ より $\gamma_{rs}(X,x) \neq 0$ となり矛盾. したがって $\kappa_\gamma(X,x) = -\infty$ である. 逆は明らか.

(ii)　$f: Y \to X$ を (X,x) の良解消とする. 対数的端末特異点ならば $r|m$ なるすべての m に対し, $\omega_Y^{\otimes m} = f^*\omega_X^{[m]}(m\sum m_i E_i)$, $m_i > -1$ であるので $m - 1 + m m_i \geq 0$. よって

$$f_*\big(\omega_Y^{\otimes m}((m-1)E)\big) = f_*\big(f^*\omega_X^{[m]}(\sum_i (m-1+m m_i)E_i)\big) = \omega_X^{[m]}.$$

よってこのような m については $\delta_m(X,x) = 0$. 一般の m については (i) の証

明と同様に示される．逆は明らかである．

(iii) (X,x) が対数的標準特異点であって対数的端末特異点でないとする．$r|m$ なる m について $\omega_X^{[m]}$ の $\mathcal{O}_X$ 上の生成元 θ_m をとると，各素因子 E_i について $\nu_{E_i}(\theta_m) = mm_i$ であるが，仮定よりこれは $\geq -m$ をみたし，ある i については，$= -m$ となる．いま $h \in \mathcal{O}_X$ に対し，$h\theta_m \in f_*\omega_Y^{\otimes m}\big((m-1)E\big)$ ならば f^*h は，ある E_i 上で 0 にならなければならないので，連結コンパクト集合 E 全体で 0 になり，よって $h(x) = 0$. したがって，$h \in \mathfrak{m}_{X,x}$. 逆に $h \in \mathfrak{m}_{X,x}$ なら $h\theta_m \in f_*\omega_Y^m\big((m-1)E\big)$ は明らか．よって

$$\omega_X^{[m]}/f_*\omega_Y^{\otimes m}\big((m-1)E\big) \simeq \mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_{X,x}$$

となり $\delta_m(X,x) = 1$. 今，$r \not| m$ なるある m に対して $\delta_m(X,x) \neq 0$ とする．このとき $\eta \in \omega_X^{[m]}$ で $\eta \notin f_*\omega_Y^{\otimes m}\big((m-1)E\big)$ なるものがある．$\eta^r \notin f_*\omega_Y^{\otimes mr}\big((mr-1)E\big)$ なので $\eta^r = h\theta_{rm}$, $h \notin m_{X,x}$. したがって η^r は x の近傍で零点をもたない．よって η もそうである．これは η が $\omega_X^{[m]}$ の生成元であることを示している．よって $d = (r,m)$ とすると $\omega_X^{[d]}$ が可逆となり r の最小性に矛盾する．よって $\delta_m(X,x) = 0$ $(r \not| m)$.

逆に $\kappa_\delta(X,x) = 0$ を仮定する．(X,x) が対数的標準特異点でないとすると，$-t := \nu_{E_i}(\theta_r) < -r$ なる素因子 E_i が存在する．Y 上の $h(E_i) = 0$ なる正則関数 h をとり $\nu_{E_i}(h) = s$ とおく．$\theta_r^m, h\theta_r^m, \cdots, h^{[\frac{m(t-r)}{s}]}\theta_r^m$ は $\omega_X^{[mr]}/f_*\omega_Y^{\otimes mr}\big((mr-1)E\big)$ の線型独立な元を与えるので $\delta_{mr}(X,x) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ となり $\kappa_\delta(X,x) = 0$ に反する．

与えられた値を κ_d あるいは κ_δ にもつような典型的な特異点を構成しよう．

例 5.3.13 S を $n-1$ 次元の非特異な射影多様体，$\mathcal{L}$ を豊富な可逆層とする．$\widetilde{X}$ を $\mathcal{L}$ で定義される直線束 $\mathbb{V}(\mathcal{L})$, その零切断を E とすると [E.G.A., II 8.9.1] により固有射 $f : \widetilde{X} \to X$ が存在して $f(E) = \{x\}$ 一点，$\widetilde{X} - E \tilde{\to} X - \{x\}$ 同型となっている．このような (X,x) を，S 上の**錐** (cone) とよぶ．このとき $d_m(X,x) = P_m(E)$. よって特に $\kappa_d(X,x) = \kappa(E)$. ここで $P_m(E)$ は $\dim\Gamma(E, \mathcal{O}_E(mK_E))$, κ は P_m の増大の位数を表し，小平次元とよばれている

ものである．

実際 $p:\widetilde{X}\to S$ を自然な射影とすると $K_{\widetilde{X}}=p^*K_S-E$. したがって制限写像

$$\Gamma\bigl(\widetilde{X},\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(m(K_{\widetilde{X}}+E))\bigr)\longrightarrow\Gamma\bigl(E,\mathcal{O}_E(m(K_{\widetilde{X}}+E))\bigr)=\Gamma\bigl(E,\mathcal{O}_E(mK_E)\bigr)$$

は全射．したがって $f_*\omega_{\widetilde{X}}^{\otimes m}(mE)/f_*\omega_{\widetilde{X}}^{\otimes m}((m-1)E)\simeq\Gamma(E,\mathcal{O}_E(mK_E))$ より $d_m(X,x)=P_m(E)$.

第 6 章　2 次元正規特異点

うまくいきすぎるときは
どこかで間違いをおかしている

この章では複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 2 次元代数多様体の正規特異点について考察する．2 次元代数的整多様体を曲面とよぶ．曲面上の正規特異点は孤立特異点でありまた，2.5.17 より Cohen-Macauley 特異点であることに注意する．

6.1　2 次元特異点の解消

2 次元正規特異点の解消の例外集合は，曲線の和集合になる．これが，どんな性質をもっているかを見よう．例外集合に注目することで，特異点の性質もわかる．

命題 6.1.1　1 次元射影空間 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ の因子 D_1, D_2 について次は同値である．

(i)　$\deg D_1 = \deg D_2$

(ii)　$D_1 \sim D_2$

(iii)　$\mathcal{O}(D_1) \simeq \mathcal{O}(D_2)$

[証明]　(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) は 4.2.11 より明らか．(i) $\Rightarrow$ (ii); $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ の斉次座標系を Y_0, Y_1 とすると，$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ の有理関数体は $\mathbb{C}(Y_1/Y_0)$ になる．今，$D_1 = \sum_p n_P P$, $D_2 = \sum_Q m_Q Q$ とし，P, Q の斉次座標をそれぞれ $(a_P; b_P)$, $(c_Q; d_Q)$ と書く．このとき $f = \prod_P (b_P Y_0 - a_P Y_1)^{n_P} / \prod_Q (d_Q Y_0 - c_Q Y_1)^{m_Q}$ とおくと $\sum n_P = \sum m_Q$ より $f \in \mathbb{C}(Y_1/Y_0)$, しかも $(f) = D_1 - D_2$. 逆に (ii) を仮定すると $(f) = D_1 - D_2$

なる $f \in \mathbb{C}(Y_1/Y_0)$ があるが $\deg(f) = 0$ より (i) が従う．

定義 6.1.2　$\mathbb{P}^1$ の可逆層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D)$ で $\deg D = m$ なるものを $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ と表す．

例 6.1.3　$\omega_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$．実際 $\mathbb{P}^1$ 上には次の完全列が存在する ([Ha2, II, 8.13):

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0.$$

よって，$\bigwedge^2 \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} = \Omega_{\mathbb{P}^1} = \omega_{\mathbb{P}^1}$.

次の例は簡単であるが重要である．

例 6.1.4　$b : X = B_0(\mathbb{A}^2) \to \mathbb{A}^2$ を原点 0 中心の blow up とする．このとき $E = b^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^1$ となることは 3.3.9 でみた．$E^2 = -1$ となることをみよう．5.1.7 により $K_X = b^*K_{\mathbb{A}^2} + E$．これに添加公式 (4.3.11) を施して $K_E = K_X + E|_E = b^*K_{\mathbb{A}^2} + 2E|_E \sim 2E|_E$．6.1.3 より $E^2 = \deg E|_E = -1$.

定義 6.1.5　非特異曲面 X 上の曲線 C が次の条件をみたすとき**第一種例外曲線** (exceptional curve of the first kind) または **(−1)-曲線** ((−1)-curve) とよぶ：

(1)　$C \cong \mathbb{P}^1$
(2)　$C^2 = -1$

次の結果は，特異点の広義の解消の例外因子のみたすべき条件を与える．

定理 6.1.6　(Mumford)　$f : Y \to X$ を 2 次元正規特異点 (X, x) の広義の特異点解消とする．例外集合 $f^{-1}(x)_{\mathrm{red}} = \sum_{i=1}^r E_i$ とすると，交点数 $E_i \cdot E_j$ を (i, j) 成分とする行列 (これを E の**交点行列** (intersection matrix) とよぶ) は負定値となる．

[証明]　X 上 $h(x)=0$ なる正則関数 h をとり，Y 上の因子 $(f^*h)=D+\sum_{i=1}^r m_iE_i$ (D は E_i を因子に含まない) を考えると f^*h はすべての E_i 上で零になるから $m_i>0$ $(^\forall i=1,\cdots r)$. 行列 $(E_i\cdot E_j)_{ij}$ が負定値であることを示すために $(m_im_jE_i\cdot E_j)_{ij}$ が負定値になることを示せば十分. $e_{ij}:=m_im_jE_i\cdot E_j$ とおく. $(f^*h)\cdot E_j=0$ であるから $0=\bigl(D+\sum_i m_iE_i\bigr)\cdot E_j=D\cdot E_j+\bigl(\sum m_iE_i\bigr)\cdot E_j$. ここで $D\cdot E_j\geq 0$ より $m_j\bigl(\sum m_iE_i\bigr)\cdot E_j\leq 0$ となり $\sum_{i=1}^r e_{ij}\leq 0$ $(^\forall j)$. 特に $D\cdot E_j>0$ なる j に関しては $\sum_{i=1}^r e_{ij}<0$ となる. 任意の $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}$ に対し，2 次形式 ${}^t\boldsymbol{x}(e_{ij})\boldsymbol{x}=$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i=1,\cdots,r\\ j=1,\cdots,r}} x_ix_je_{ij} &= \sum_{i=1}^r e_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}e_{ij}x_ix_j\\ &= \sum_{j=1}^r e_{jj}x_j^2+\left(\sum_{\substack{ij\\ i\neq j}}e_{ij}x_j^2-\sum_{\substack{ij\\ i\neq j}}e_{ij}x_j^2\right)+2\sum_{i<j}e_{ij}x_ix_j\\ &= \sum_{j=1}^r\left(\sum_{i=1}^r e_{ij}\right)x_j^2-\sum_{i<j}e_{ij}(x_i-x_j)^2.\end{aligned}$$

ここで $\sum_{i=1}^r e_{ij}\leq 0$ と $e_{ij}\geq 0$ $(i\neq j)$ により上式 ≤ 0. もし，上式 $=0$ とすると，$D\cap E_k\neq\emptyset$ なる k については $\sum_{i=1}^r e_{ik}<0$ であるから $x_k=0$ でなければならない. $E_{k'}\cap E_k\neq\emptyset$ なる k' $(k'\neq k)$ に対しては $e_{kk'}>0$ であるから $(x_k-x_{k'})^2=0$ により $x_{k'}=0$. Zariski の主定理 (例えば [Ha2, V,5.2]) により $\cup E_i$ は連結であるので，この操作を順次行うことにより $x_i=0$ $(^\forall i)$ を得る. これにより負定値であることが示された.

次の定理はこの定理の逆を与える. 証明は多くの準備を必要とするのでここでは割愛する.

定理 6.1.7　(Grauert [Gr2])　非特異曲面 Y 上の完備な因子 $E=\sum_{i=1}^r E_i$ が負定値交点行列 $(E_i\cdot E_j)_{ij}$ をもつとき，正規特異点 (X,x) と固有射 $f:Y\to X$ が一意的に存在して $f|_{Y\setminus E}:Y\setminus E\to X\setminus\{x\}$ が同型になっている.

同じく Grauert の次の定理は，因子をつぶしてできた特異点が同じものであるための1つの十分条件を与える．

定理 6.1.8　(Grauert [Gr2, Satz 7, Corollar])　非特異多様体 Y 上の完備な非特異素因子 E が次の条件をみたすとする：

(i)　$H^1(E, \mathcal{I}_E^m/\mathcal{I}_E^{m+1}) = 0 \quad {}^\forall m \geq 1$

(ii)　$H^1(E, \Omega_E^* \otimes \mathcal{I}_E^m/\mathcal{I}_E^{m+1}) = 0 \quad {}^\forall m \geq 1$

このとき E の解析的な近傍 $U \subset Y$ と $\mathbb{V}(\mathcal{I}_E/\mathcal{I}_E^2)$ の零切断 E_0 の解析的な近傍 $U_0 \subset \mathbb{V}(\mathcal{I}_E/\mathcal{I}_E^2)$ が存在して解析空間の組の同型 $(U, E) \simeq (U_0, E_0)$ となる．

系 6.1.9　非特異曲面 Y, Y' 上の完備な非特異素因子 E, E' が $E \simeq E'$, $\mathcal{I}_E/\mathcal{I}_E^2 \simeq \mathcal{I}_{E'}/\mathcal{I}_{E'}^2$, $E^2 < 0$ をみたし，さらにこれらが 6.1.8 の (i) (ii) をみたしているとき 6.1.7 によって得られた E, E' をつぶす射を $f : (U, E) \to (X, x)$, $f' : (U', E') \to (X', x')$ とすると

$$\begin{array}{ccc} (U, E) & \longrightarrow & (X, x) \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ (U', E') & \longrightarrow & (X', x') \end{array}$$

なる可換図式がある．

例 6.1.10　素因子 E を非特異曲面 Y 上の (-1)-曲線とする．6.1.7 より $f : Y \to X$, $f(E) = \{x\}$, $f|_{Y-E} : Y - E \xrightarrow{\sim} X - \{x\}$ なる射が存在するが，(X, x) は非特異になり f は x を中心とする X の blow up と同じ射である．実際 $b : Y' \to \mathbb{A}^2$ を原点を中心とする blow up とすると b の例外曲線 E' も (-1)-曲線であった (6.1.4) ので 6.1.1 より，$E \simeq E' \simeq \mathbb{P}^1$, $\mathcal{I}_E/\mathcal{I}_E^2 \simeq \mathcal{I}_{E'}/\mathcal{I}_{E'}^2 \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. また $\mathcal{I}_E^m/\mathcal{I}_E^{m+1} \simeq \mathcal{I}_{E'}^m/\mathcal{I}_{E'}^{m+1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ 及び (6.1.3) の $\Omega_{\mathbb{P}^1}$ の完全列と Serre の消滅定理 ([Se2, III, §3, Prop.8]), $H^1\big(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)\big) = 0$ $(m \geq 0)$ より 6.1.8 (i) (ii) がみたされる．よって 6.1.9 より 2 つの芽 (X, x), $(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2, 0)$ は同型である．

因子をつぶしてできる点が，非特異であるための必要十分条件は次で与えられる．

定理 6.1.11 (Castelnuovo の判定法)　非特異曲面 Y 上の完備な非特異素因子 E に対して非特異曲面への固有射 $f : Y \to X$ が存在して，$f(E) = x$, $f|_{Y \setminus E} : Y \setminus E \xrightarrow{\sim} X \setminus \{x\}$ となっているための必要十分条件は，E が (-1)-曲線になることである．

[証明]　E が (-1)-曲線なら条件をみたす固有射が存在することは 6.1.10 で示された．逆に条件をみたす固有射 $f : Y \to X$ が与えられたとする．完全列：

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_E \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0$$

により完全列

$$R^1 f_* \mathcal{O}_Y \longrightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_E = H^1(E, \mathcal{O}_E) \longrightarrow R^2 f_* \mathcal{I}_E = 0$$

を得るが (X, x) は有理的であるから $R^1 f_* \mathcal{O}_Y = 0$. よって $H^1(E, \mathcal{O}_E) = 0$ でなければならないが，これは $E \cong \mathbb{P}^1$ を意味する．今，$E^2 = -n$ $(n > 0)$ としよう．

$$(1) \quad \dim \Gamma(E, \mathcal{I}_E/\mathcal{I}_E^2) \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$$

を示せば $\dim \Gamma(E, \mathcal{I}_E/\mathcal{I}_E^2) = \dim \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) = n+1$ ([Se2, III, §3, Prop.8]) と (X, x) が 2 次元非特異点であること (3.7.8) により $n = 1$ にならねばならない．(1) を示そう．$\mathcal{I}$ は f-豊富になるので Serre の消滅定理 ([EGAIII, 2.6.1]) より十分大きな m に対して $R^1 f_* \mathcal{I}_E^m = 0$. また任意の $i \geq 1$ に対して，$H^1(E, \mathcal{I}_E^i/\mathcal{I}_E^{i+1}) = 0$ より帰納的に任意の $i \geq 1$ について $R^1 f_* \mathcal{I}_E^i = 0$ が示される．特に $R^1 f_* \mathcal{I}_E^2 = 0$ なので完全列：

$$0 \longrightarrow f_* \mathcal{I}_E^2 \longrightarrow f_* \mathcal{I}_E \longrightarrow \Gamma(E, \mathcal{I}_E/\mathcal{I}_E^2) \longrightarrow 0$$

を得るが，$f_* \mathcal{I}_E = \mathfrak{m}_{X,x}$, $f_* \mathcal{I}_E^2 \supset \mathfrak{m}_{X,x}^2$ より全射 $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2 \twoheadrightarrow \Gamma(E, \mathcal{I}_E/\mathcal{I}_E^2)$ を得る．

では (-1)-曲線であることをどうやって判定したらよいのだろうか．

命題 6.1.12　非特異代数曲面 Y 上の曲線 E が (-1)-曲線であることと次は同

値である： $K_Y \cdot E < 0$ かつ $E^2 < 0$.

［証明］ E が (-1)-曲線とすると $-2 = \deg K_E = E^2 + K_Y \cdot E$ より $K_Y \cdot E < 0$, $E^2 < 0$ をみたすことは明らか．逆を示そう．永田の定理より Y は完備な代数的整多様体に開部分多様体としてうめ込まれるので，Y を非特異な完備代数的整多様体として良い．Y 上の完全列： $0 \to \mathcal{O}_Y(-E) \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_E \to 0$ より $\chi(E, \mathcal{O}_E) = \chi(Y, \mathcal{O}_Y) - \chi(Y, \mathcal{O}(-E))$. ここで，Riemann-Roch の定理 (4.4.5) より

$$\chi(E, \mathcal{O}_E) = -\frac{1}{2}(K_Y \cdot E + E^2).$$

$h^0(E, \mathcal{O}_E) = 1$ であるから $h^1(E, \mathcal{O}_E) = \frac{1}{2}(K_Y \cdot E + E^2) + 1$. 仮定より $h^1(E, \mathcal{O}_E) = 0$, $K_Y \cdot E + E^2 = -2$ を得る．よって $E^2 = K_Y \cdot E = -1$ でなければならない．$\pi : \overline{E} \to E$ を E の正規化とすると $0 \to \mathcal{O}_E \to \pi_*\mathcal{O}_{\overline{E}} \to \pi_*\mathcal{O}_{\overline{E}}/\mathcal{O}_E \to 0$ により完全列： $0 \to \Gamma(E, \mathcal{O}_E) \to \Gamma(E, \pi_*\mathcal{O}_{\overline{E}}) \to \Gamma(E, \pi_*\mathcal{O}_{\overline{E}}/\mathcal{O}_E) \to H^1(E, \mathcal{O}_E) = 0$ を得るが，左の2項はともに $\mathbb{C}$ となり同型だから $\pi_*\mathcal{O}_{\overline{E}}/\mathcal{O}_E = 0$ となり π は同型．$H^1(E, \mathcal{O}_E) = 0$ なる非特異曲線 E は $\mathbb{P}^1$ に限られる．

一点を中心とする blow up は非特異代数曲面間の固有射において基本的な働きをする．

命題 6.1.13　$f : Y \to X$ を非特異代数曲面間の固有射で X の有限個の点を除いた開集合上で同型を与えているとする．このとき一点を中心とする blow up $\sigma_i : X_i \to X_{i-1}, i = 1, \ldots, k$ $(X_k = Y, X_0 = X)$ が存在して $f = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_k$ と分解される．

［証明］ f の既約な例外因子を $E_1, \cdots, E_k$ とすると，X は非特異であるから，5.2.5 により $K_Y = f^*K_X + \sum_{i=1}^k m_i E_i$, $m_i > 0$ $(\forall i = 1, \cdots, k)$. ここで $(E_i \cdot E_j)_{ij}$ は負定値であったから $(\sum m_i E_i)^2 < 0$, $E_i^2 < 0$ $(\forall i)$. よって特にある E_j が存在し $K_Y \cdot E_j = (\sum m_i E_i) \cdot E_j < 0$, $E_j^2 < 0$. よって E_j は (-1)-曲

線となり，非特異曲面 X_{k-1} があって $\sigma_k : Y \to X_{k-1}$ が E_j を例外集合にもつ一点を中心とする blow up となっている．射 $X_{k-1} \setminus \sigma_k(E_k) \to X \setminus f(E_k)$ は X_{k-1} 上の射 $f_{k-1} : X_{k-1} \to X$ に自然に拡張されるので，分解 $f = f_{k-1} \circ \sigma_k$ を得る．f_{k-1} について同様の操作を行い順次 $\sigma_{k-1}, \cdots, \sigma_1$ を得る．

1 つの特異点解消をさらに点で blow up すると新たな特異点解消が得られる．このようにして，1 つの特異点に対して無限の特異点解消が得られる．我々は，これらの中で最も無駄のないものを考慮したい．

定義 6.1.14　正規特異点 (X, x) の解消 $f : Y \to X$ が**最小特異点解消** (minimal resolution) であるとは任意の (X, x) の解消 $g : Y' \to X$ に対し $\varphi : Y' \to Y$ が一意的に存在し $g = f \circ \varphi$ と分解することである．

定義よりもし最小特異点解消が存在すれば，それは X 上の同型を除いて一意的であることがわかる．次の定理は 2 次元特異点の最小特異点解消の存在を示している．

定理 6.1.15　2 次元正規特異点 (X, x) の解消 $f : Y \to X$ が最小特異点解消であるためには $f^{-1}(x)$ が (-1)-曲線を含まないことが必要十分．特に最小特異点解消は存在する．

［証明］ 最小特異点解消が (-1)-曲線を含まないことは明らか．逆に $f : Y \to X$ を (-1)-曲線を含まない解消とする．$g : Y' \to X$ を任意の解消とする．$Y \times_X Y'$ の特異点解消をとることにより解消 $\widetilde{f} : \widetilde{Y} \to X$ であって $\varphi : \widetilde{Y} \to Y$, $\psi : \widetilde{Y} \to Y'$ が存在し $f \circ \varphi = \widetilde{f} = g \circ \psi$ なるものを構成できる．6.1.13 より $\psi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$ $(\sigma_i (i = 1, \cdots, k)$, は点の blow up) と分解されているが k の値が最小となっている $\widetilde{f}$ をとる．$k > 0$ とすると $\widetilde{Y}$ 上の σ_k による例外曲線を E とする．$\varphi(E) = C$ が曲線とすると，$C^2 = (\varphi^* C)^2$ であるから $E^2 \leq C^2$ で等号が成立することと，φ が C の近傍で同型であることは同値，C は f の例外曲線だから $-1 = E^2 \leq C^2 < 0$ より結局等号 $C^2 = E^2$ が成立し，φ は C

の近傍で同型になる．よって C は E と同じく (-1)-曲線となり $f: Y \to X$ の定義に反する．よって $\varphi(E)$ は点になる．したがって φ も E をつぶす射 σ_k を経由して分解する．これは k の最小性に反する．したがって $k=0$ でなければならない．こうして $\varphi: Y' = \widetilde{Y} \to Y$ が得られたが，$g = f \circ \varphi$ をみたす φ は例外集合を除く開集合上で一意的．よって Y' 上で一意的．またこのような解消 $f: Y \to X$ は，任意の解消の (-1)-曲線を順次つぶして得られるので最小特異点解消の存在もいえた．

カルティエ因子 D については射 f によるひきもどしが定義されていた (4.2.14)．2次元の場合はヴェイユ因子についても次のようにひきもどしが定義される．

定義 6.1.16　X を正規曲面，$f: Y \to X$ をその特異点解消 E_i $(i = 1, \cdots, r)$ を例外因子とする．X 上の任意の因子 D に対し，$f^*D \in \mathrm{Div}(Y) \otimes \mathbb{Q}$ を次のように定義する：
D の狭義の逆像を $[D]$ とし $f^*D := [D] + \sum_{i=1}^r m_i E_i$ とする．ただし $m_i \in \mathbb{Q}$ は r 個の方程式 $([D] + \sum m_i E_i) \cdot E_j = 0$ $(j = 1, \cdots, r)$ の解とする．ここで係数行列 $(E_i \cdot E_j)_{ij}$ は負定値であったから，解は一意的に存在する．

特異点解消 $f: Y \to X$ について例外集合の外では f は同型だから，K_Y と f^*K_X の差は，例外集合上にのみ表れる．この差はどんなものになるのだろうか．f が最小特異点解消のときに著しい性質をもつ．

命題 6.1.17　$f: Y \to X$ を2次元正規特異点 (X, x) の最小特異点解消，E_i $(i = 1, \cdots, r)$ を既約な例外因子とする．このとき　$K_Y = f^*K_X + \sum_{i=1}^r m_i E_i$, $m_i \leq 0$ $({}^\forall i = 1, \cdots, r)$ が成立する．

［証明］ $m_i > 0$ なる i が存在したとする．番号をつけかえて $m_i > 0$ $(i = 1, \cdots, s)$, $m_i \leq 0$ $(i = s+1, \cdots, r)$ とする．$(E_i \cdot E_j)_{ij}$ は負定値だから $\left(\sum_{i=1}^s m_i E_i\right)^2 < 0$. よって $\left(\sum_{i=1}^s m_i E_i\right) \cdot E_j < 0$ なる j $(1 \leq j \leq s)$ が

存在．$K_Y \cdot E_j = \left(\sum_{i=1}^{s} m_i E_i\right) \cdot E_j + \left(\sum_{i=s+1}^{r} m_i E_i\right) \cdot E_j < 0$ により E_j は (-1)-曲線となり，f の最小性に反する．

これを用いて 2 次元端末特異点の特徴づけが得られる．

系 6.1.18 曲面上の点 (X, x) について，非特異であることと，端末特異点であることは同値である．

[証明] 端末特異点 (X, x) が非特異でないとする．$f : Y \to X$ を (X, x) の最小特異点解消とすると f は同型ではない．6.1.17 より $m_i \leq 0$ $({}^\forall i = 1, \cdots, r)$ となるので，端末特異点であることに反する．

例外因子の概形をつかむためにグラフの概念を導入しよう．

6.1.19 2 次元正規特異点 (X, x) の良解消 $f : Y \to X$ において既約な例外因子 E_i がすべて非特異である場合，例外集合 $\bigcup_{i=1}^{r} E_i$ に対する**重みつきグラフ** (weighted graph) を次のように定義する：

各素因子 E_i $\Longrightarrow$ 頂点 ○ を対応させる

E_i と E_j が交わっているとき $\Longrightarrow$ E_i, E_j に対応する頂点を線分でつなぐ：○—○

$E_i^2 = -a$ のとき $\Longrightarrow$ 対応する頂点の中に $-a$ と書く：$\textcircled{-a}$
特に $a = -2$ のときは何も書かない

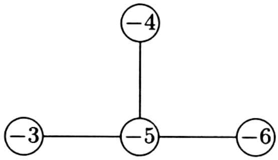
例 6.1.20 例外集合の交点行列が

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

のとき重みつきグラフは ○——○——○ となる．

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

の場合は



となる．

6.2　基本サイクル

この節では例外因子上に台をもつ基本サイクルを導入する．これは次の節で有理性の判定に使われる．

補題 6.2.1　S を非特異曲面，E_i $(i=1,\cdots,r)$ を S 上の完備な素因子とする．交点行列 $(E_i\cdot E_j)_{ij}$ が負定値であるとき正因子 $Z=\sum m_iE_i$ で $Z\cdot E_i<0$ $(i=1,\cdots,r)$ をみたすものが存在する．

［証明］ 交点行列 $(E_i\cdot E_j)_{ij}$ を A とおく．A は正則な整数行列であるから，
$$A\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix},$$
α_i $(i=1,\cdots,r)$ は負の整数となるような整数 $m_1,\cdots,m_r$ が存在する．$Z:=\sum m_iE_i$ とおくと各 i について $Z\cdot E_i=\alpha_i<0$. $Z>0$ を示そう．$Z=Z_1-Z_2$ (Z_1, Z_2 は共通因子をもたない有効因子)．Z の性質より $0\geq Z\cdot Z_2=(Z_1-Z_2)\cdot Z_2=Z_1\cdot Z_2-Z_2^2\geq 0$. したがって $Z_1\cdot Z_2=Z_2^2=0$ となり $Z_2=0$ を得る．

補題 6.2.2　6.2.1 と同じ条件のもとで，$E=\sum_{i=1}^r E_i$ を連結とする．このとき S 上の因子の集合 $\{Z>0 \mid Z\cdot E_i\leq 0, i=1,\cdots,r\}$ には最小元が存在する．

［証明］ 6.2.1 によりこの集合は空集合ではない．任意の二つの要素 $Z=$

$\sum_{i=1}^r m_iE_i$, $Z' = \sum_{i=1}^r m_i'E_i$ をとると Z, Z' の台は E 全体になる．$n_i := \min\{m_i, m_i'\}$ として $Z'' := \sum_{i=1}^r n_iE_i$ とおくと Z'' の台も E 全体．各 i について $Z''\cdot E_i \leq 0$ を示す．$m_i \leq m_i'$ とすると $Z''\cdot E_i = m_iE_i^2 + \sum_{j\neq i} n_jE_j\cdot E_i \leq m_iE_i^2 + \sum_{j\neq i} m_jE_j\cdot E_i = Z\cdot E_i \leq 0$.

定義 6.2.3 (X, x) を 2 次元正規特異点 $f: Y \to X$ を特異点解消，$E = \sum_{i=1}^r E_i$ を例外因子とする．$\{Z > 0 \mid Z\cdot E_i \leq 0, i = 1, \cdots, r\}$ の最小元を Y の**基本サイクル** (fundamental cycle) とよび，fundamental の "f" を用いて Z_f と表す．

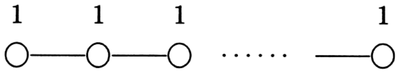
定義から直接基本サイクルを求めることは困難である．ではどうやって求めるのだろうか．基本サイクルは次の計算列によって求められる．

命題 6.2.4 6.2.3 の記号の下で，E_{i_1} を任意にとり，$Z_1 := E_{i_1}$ とおく．$Z_1, \cdots, Z_{\nu-1}$ まで定義されたとき，$Z_{\nu-1}\cdot E_{i_\nu} > 0$ なる E_{i_ν} が存在したら，$Z_\nu := Z_{\nu-1} + E_{i_\nu}$ とおく．すると，この操作は有限回で終る．終った時点の Z_{ν_0} が基本サイクルである．Z_f に至るこの因子の列 $\{Z_1, Z_2, \cdots, Z_{\nu_0}\}$ を**計算列** (computation sequence) とよぶ．

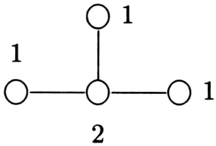
［証明］ 構成法より $Z_1 < Z_2 < \cdots$ なので，任意の Z_ν について $Z_\nu \leq Z_f$ を示せば良い．ν に関する帰納法で示そう．$Z_1 = E_{i_1} \leq Z_f$ は明らか．$Z_{\nu-1} \leq Z_f$ とする．もし $Z_{\nu-1} \neq Z_f$ なら $Z_{\nu-1}E_{i_\nu} > 0$ なる E_{i_ν} があるので $Z_\nu := Z_{\nu-1} + E_{i_\nu}$ とおいた．ここで $Z_{\nu-1} = \sum_i n_iE_i$, $Z_f = \sum_i m_iE_i$ とすると，任意の i に対して $n_i \leq m_i$. もし $n_{i_\nu} = m_{i_\nu}$ とすると，$Z_{\nu-1}\cdot E_{i_\nu} = n_{i_\nu}E_{i_\nu}^2 + \sum_{i\neq i_\nu} n_iE_i\cdot E_{i_\nu} \leq m_{i_\nu}E_{i_\nu}^2 + \sum_{i\neq i_\nu} m_iE_i\cdot E_{i_\nu} = Z_f\cdot E_{i_\nu} \leq 0$ となり矛盾．したがって $n_{i_\nu} < m_{i_\nu}$ となり $Z_\nu = Z_{\nu-1} + E_{i_\nu} \leq Z_f$.

例 6.2.5 (-2)-curve からなる次のグラフの基本サイクルは以下のようになる．ここで各数字は基本サイクルの各素因子の係数を表す．

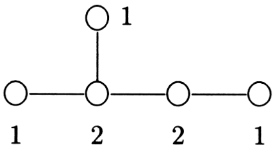
(i)　A_n :



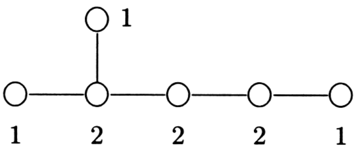
(ii)　D_4 :



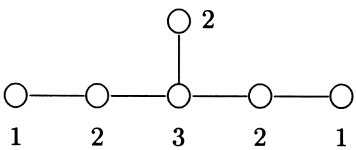
D_5 :



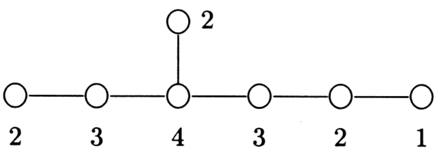
D_6 :



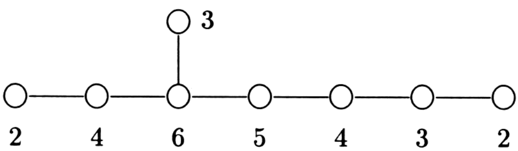
(iii)　E_6 :



E_7 :



E_8 :



2つの解消の上のそれぞれの基本サイクルはどんな関係をもっているのだろうか.

命題 6.2.6　正規特異点 (X, x) の2つの特異点解消 $f : Y \to X$, $g : Y' \to X$

の間に射 $\sigma : Y' \to Y$ があって $g = f \circ \sigma$ をみたしているとき Y の基本サイクル Z_1 と Y' の基本サイクル Z_2 は $Z_2 = \sigma^* Z_1$ という関係をもつ.

[証明] 6.1.13 により σ が 1 点の blow up のときに示せば十分. $E_1, \cdots, E_r$ を $f^{-1}(x)$ の素因子とする. Y' における E_i の狭義の逆像を E'_i とし, σ の例外曲線を F とする. $\sigma^* Z_1 \cdot E'_i = Z_1 \cdot E_i \leq 0$, $\sigma^* Z_1 \cdot F = 0$ より $Z_2 \leq \sigma^* Z_1$. $Z_2 = \sum_{i=1}^r a_i E'_i + bF$, $\sigma^* Z_1 = \sum_{i=1}^r \alpha_i E'_i + \beta F$ とおいて $a_i = \alpha_i$, $b = \beta$ となることを示そう. $a_i < \alpha_i$ なる i があるとすると $\sigma_* Z_2 < Z_1$. したがってある i_0 に対し, $0 < \sigma_* Z_2 \cdot E_{i_0} = \sigma^* \sigma_* Z_2 \cdot E'_{i_0}$ これより $E'_{i_0} \cap F \neq \emptyset$ がわかる. ここで $\sigma^* \sigma_* Z_2 = \sum a_i E'_i + b' F$ とおくと, 上の不等式より $b' > b$ を得る. ところが $0 = \sigma^* \sigma_* Z_2 \cdot F = \sum a_i E'_i \cdot F + b' F^2 < \sum a_i E'_i \cdot F + bF^2 = Z_2 \cdot F \leq 0$ となり矛盾. したがって $a_i = \alpha_i$ $(i = 1, \cdots, r)$ でなければならない. 次に $b < \beta$ とすると $0 \geq Z_2 \cdot F = \sum a_i E'_i \cdot F + bF^2 > \sum \alpha_i E'_i \cdot F + \beta F^2 = 0$ で矛盾となる.

ここで因子に対する不変数を導入しよう.

定義 6.2.7 S を非特異代数曲面, D を S 上の完備な因子とするとき D の**仮想種数** (virtual genus) $p(D)$ を次のように定義する：

$$p(D) := \frac{D^2 + K_S \cdot D}{2} + 1$$

仮想種数の基本的な性質をみてみよう.

命題 6.2.8 (i) $D > 0$ のとき $p(D) = 1 - \chi(D, \mathcal{O}_D)$.
(ii) D が素因子のとき, $p(D) \geq 0$. ここで等号成立と $D \cong \mathbb{P}^1$ は同値である.

[証明] (i) 完備化により S は完備な非特異曲面として良い. S 上の完全列 $0 \to \mathcal{O}_S(-D) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_D \to 0$ より $\chi(D, \mathcal{O}_D) = \chi(S, \mathcal{O}_S) - \chi(S, \mathcal{O}_S(-D))$. ここで Riemann-Roch の定理 (4.4.5) より

$$\chi(D,\mathcal{O}_D)=-\frac{1}{2}(D^2+K_S\cdot D)$$

(ii)　D が既約で被約であるので，$h^0(D,\mathcal{O}_D)=1$．したがって $p(D)=1-\chi(D,\mathcal{O}_D)=h^1(D,\mathcal{O}_D)\geq 0$．$D\cong\mathbb{P}^1$ なら，等号成立は明らか．逆に等号が成立すると D の正規化 $\pi:\overline{D}\to D$ をとり，6.1.12 の証明と同じ議論により $D\cong\mathbb{P}^1$ が得られる．

命題 6.2.9　正規特異点 (X,x) の任意の特異点解消に対しその基本サイクル Z_f の仮想種数 $p(Z_f)$ は一定である．

［証明］ 2つの特異点解消の間の射 $\sigma:Y'\to Y$ に対し $p(\sigma^*Z)=p(Z)$ が成立するので 6.2.6 より主張はいえる．

定義 6.2.10　正規特異点 (X,x) に対し，特異点解消 $f:Y\to X$ の基本サイクル Z_f の仮想種数 $p(Z_f)$ を $p_f(X,x)$ と表しここでは**基本種数** (fundamental genus) とよぶ．

命題 6.2.11　任意の正規特異点 (X,x) について　$p_f(X,x)\geq 0$.

［証明］ 特異点解消 $f:Y\to X$ の基本サイクルを Z_f, これに至る計算列を $Z_1,\cdots,Z_{\nu_0}=Z_f$ とする．構成により任意の ν に対し $Z_\nu=Z_{\nu-1}+E_{i_\nu}$, $Z_{\nu-1}\cdot E_{i_\nu}>0$. また 6.2.8 により $p(E_{i_\nu})\geq 0$. よって

$$p(Z_\nu)=p(Z_{\nu-1}+E_{i_\nu})=p(Z_{\nu-1})+p(E_{i_\nu})+Z_{\nu-1}\cdot E_{i_\nu}-1\geq p(Z_{\nu-1}).$$

特に $\nu=1$ とすると Z_1 は既約であるから $p(Z_1)\geq 0$. したがって，任意の ν に対し $p(Z_\nu)\geq 0$ が得られる．

次に算術種数とよばれる特異点の新しい不変数を定義しよう．そのためには準備をしなければならない．正規特異点 (X,x) の解消 $f:Y\to X$ に対して

$$p_a(f)=\sup\{p(Z)\mid Z>0,\ |Z|\subset f^{-1}(x)\}$$

とおく．ただし $|Z|$ は因子 Z の台を表す．

補題 6.2.12　正規特異点 (X,x) の 2 つの特異点解消 $f:Y\to X$, $g:Y'\to X$ に対して，$p_a(f)=p_a(g)$ がなり立つ．

［証明］ 射 $\sigma:Y'\to Y$ があって，$g=f\circ\sigma$ をみたしているとき示せば良い．6.1.13 より σ が 1 点の blow up のときに示せば十分．Y 上の任意の $Z>0$, $|Z|\subset f^{-1}(x)$ に対して $\sigma^*Z>0$, $|\sigma^*Z|\subset g^{-1}(x)$ となり $p(Z)=p(\sigma^*Z)$ となるので $p_a(f)\le p_a(g)$ は明らか．逆を示すために Y' 上の任意の $Z>0$, $|Z|\subset g^{-1}(x)$ に対し $p(\sigma^*\sigma_*Z)\ge p(Z)$ を示せば十分．$f^{-1}(x)$ の素因子を E_i $(i=1,\cdots,r)$, その Y' 上の狭義の逆像を E_i' $(i=1,\cdots,r)$, σ の例外曲線を F とする．各 i に対し $\sigma^*E_i=E_i'+m_iF$ とおくと，$F^2=-1$ より $E_i'\cdot F=m_i$ となる．Z を $Z=Z_1+nF$, $Z_1=\sum_{i=1}^r n_iE_i'$ と分解すると $\sigma_*Z=\sum n_iE_i$, $\sigma^*\sigma_*Z=Z_1+(\sum m_in_i)F$. ここで任意の ν に対して $p(Z_1+\nu F)=p(Z_1+(\nu-1)F)+p(F)+(Z_1+(\nu-1)F)\cdot F-1$ より $p(Z_1+\nu F)=p(Z_1+(\nu-1)F)+\sum_{i=1}^r m_in_i-\nu$ したがって

$$\nu\le\sum m_in_i \text{ ならば } p(Z_1+(\nu-1)F)\le p(Z_1+\nu F),$$
$$\nu>\sum m_in_i \text{ ならば } p(Z_1+\nu F)<p(Z_1+(\nu-1)F).$$

よって $p(Z_1+(\sum m_in_i)F)\ge p(Z_1+nF)$.

これにより $p_a(f)$ の値は，特異点解消 f のとり方によらないことがわかったので次のような定義が可能である．

定義 6.2.13　正規特異点 (X,x) に対し，ある特異点解消 $f:Y\to X$ の $p_a(f)=\sup\{p(z)\mid Z>0,\ |Z|\subset f^{-1}(x)\}$ を**算術種数** (arithmetic genus) とよび $p_a(X,x)$ と表す．

これで我々は 3 種類の種数を得た．これらの関係は次のようになる．

定理 6.2.14　正規特異点 (X,x) に対し次が成立：

$$p_g(X,x) \geq p_a(X,x) \geq p_f(X,x) \geq 0$$

［証明］ $p_f(X,x) \geq 0$ は 6.2.11 で示した．$p_a(X,x) \geq p_f(X,x)$ は定義から明らか．$p_g(X,x) \geq p_a(X,x)$ を示そう．$f : Y \to X$ を1つの特異点解消として，Y 上の因子 $Z > 0, |Z| \subset f^{-1}(x)$ に対して，完全列 $0 \to \mathcal{O}_Y(-Z) \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Z \to 0$ が存在し，2次元であるので $R^2 f_* \mathcal{O}_Y(-Z) = 0$ より全射 $R^1 f_* \mathcal{O}_Y \to R^1 f_* \mathcal{O}_Z = H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ を得る．一方 6.2.8 より，$p(Z) = 1 - h^0(Z, \mathcal{O}_Z) + h^1(Z, \mathcal{O}_Z) \leq h^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ が成立するので $p(Z) \leq \dim R^1 f_* \mathcal{O}_Y = p_g(X,x)$.

6.3　有理特異点

(X,x) を2次元正規特異点であるとする．5.2.10, 5.3.10 により (X,x) が有理特異点であることと $p_g(X,x) = 0$ は同値である．この節では有理特異点に関する Artin の結果 ([A1], [A2]) を紹介する．最初に有理特異点の特徴づけをみよう．

定理 6.3.1　正規特異点 (X,x) に対して次は同値である：

(i)　(X,x) は有理特異点である．

(ii)　$p_a(X,x) = 0$

(iii)　$p_f(X,x) = 0$

［証明］ 6.2.14, $p_g(X,x) \geq p_a(X,x) \geq p_f(X,x) \geq 0$ より (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) は明らかである．

(iii) ⇒ (ii) の証明．　任意の正因子 Z に対して $p(Z) \leq 0$ を示せば良いが，Z から Z_f に至る列 $Z_1 = Z, Z_2, \cdots, Z_{\nu_0} = Z_f$ で $p(Z_1) \leq p(Z_2) \leq \cdots \leq p(Z_{\nu_0})$ なるものを構成することでこれは示される．実際，因子の列 $\{Z_\nu\}$ を次のように定義する．$Z_1 := Z$, $\nu > 1$ として $\nu - 1$ まで定義できたとして，

(a)　$Z_{\nu-1} > Z_f$ なら $Z_\nu := Z_{\nu-1} - Z_f$

(b) $Z_{\nu-1} \not\geq Z_f$ なら $Z_{\nu-1} \cdot E_i > 0$ なる E_i があるのでこれを用いて $Z_\nu := Z_{\nu-1} + E_i$ とおく.

(a) の場合, $$p(Z_{\nu-1}) = p(Z_\nu + Z_f) = p(Z_\nu) + p(Z_f) + Z_\nu \cdot Z_f - 1 \leq p(Z_\nu) - 1$$

(b) の場合, $$p(Z_\nu) = p(Z_{\nu-1} + E_i) \geq p(Z_{\nu-1})$$

これにより $p(Z_1) \leq p(Z_2) \leq \cdots$ が得られるが, この操作が有限回で終われば, ある ν_0 で $Z_{\nu_0} = Z_f$. 操作が無限に続くとしよう. 6.2.14 より $p(Z_\nu)$ は有界であるから (a) の操作は有限回のみ行われる. よってある番号 ν_1 以後はすべて (b) の操作のみ. 十分大きな m をとれば $Z_{\nu_1} \leq mZ_f$ であるので, 6.2.4 の証明と同様にして $Z_{\nu_1} < Z_{\nu_1+1} < \cdots \leq mZ_f$ が示される. したがってこの操作は有限回で終わらねばならない.

(ii) ⇒ (i) の証明. 特異点解消 $f : Y \to X$ を点 x の blow up を経由するようにとる. すると $\mathfrak{m}_{X,x}\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}(-D)$ (D は $f^{-1}(x)$ に台をもつ因子) となる ([EGA, II, 8.1.11]). [EGAIII 4.2.1] より $(R^1 f_* \mathcal{O}_Y)\hat{}_x = \varprojlim_n H^1(f^{-1}(x), \mathcal{O}_Y/\mathfrak{m}^n_{X,x}\mathcal{O}_Y) = \varprojlim_n H^1(f^{-1}(x), \mathcal{O}_{nD})$. よって $f^{-1}(x)$ 上に台をもつ任意の正因子 Z に対して $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ を示せば十分. $Z = \sum_{i=1}^r r_i E_i$ として $\sum r_i$ に関する帰納法を使う. $\sum r_i = 1$ のとき Z は素因子. 条件 (ii) より $p(Z) \leq 0$ であるが 6.2.8 より $p(Z) = 0$ となり $Z \cong \mathbb{P}^1$, よって $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$. $\sum r_i > 1$ として $\sum r_i - 1$ まで主張は正しいとする. $E_i < Z$ なる素因子を 1 つとり $Z_i := Z - E_i$ とおく. 帰納法の仮定より $H^1(Z_i, \mathcal{O}_{Z_i}) = 0$ なので, 完全列 $0 \to \mathcal{O}_{E_i}(-Z_i) \to \mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_{Z_i} \to 0$ から全射 $H^1(E_i, \mathcal{O}_{E_i}(-Z_i)) \to H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ を得る. ここで $E_i \cong \mathbb{P}^1$ であるから 1 つの E_i について $E_i \cdot Z_i \leq 1$ ならば $h^1(E_i, \mathcal{O}_{E_i}(-Z_i)) = h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-2 + E_i \cdot Z_i)) = 0$ より $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ を得る. そこで任意の素因子 $E_i < Z$ について $E_i \cdot Z_i > 1$ を仮定しよう. これは $Z \cdot E_i \geq E_i^2 + 2$ $(i = 1, \cdots, r)$ を意味する. したがって

$$\begin{aligned} K_Y \cdot Z + Z^2 &= (K_Y + Z) \cdot \left(\sum r_i E_i\right) \\ &= \sum r_i (K_Y \cdot E_i + Z \cdot E_i) \end{aligned}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{r} r_i(-E_i^2 - 2 + 2 + E_i^2) = 0$$

となり $p(Z) \leq 0$ に矛盾.

2次元有理特異点は次のような著しい性質をもっている．これは3次元以上では期待できない.

定理 6.3.2　2次元有理特異点 (X, x) は**解析的に $\mathbb{Q}$-分解的** (analytically $\mathbb{Q}$-factorial) である．すなわち x の解析的近傍 V が存在して V 上の任意の因子 D が $\mathbb{Q}$-カルティエ因子である．特に有理特異点は $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点である.

［証明］ $f: Y \to X$ を (X, x) の特異点解消，V を x の十分小さいスタイン近傍，$\widetilde{V} := f^{-1}(V)$ とする．Z を $f^{-1}(x)_{\mathrm{red}} = \sum_{i=1}^{r} E_i$ に台をもつ任意の正因子として次の完全可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widetilde{V}}^{\mathrm{hol}} & \xrightarrow{\exp 2\pi\sqrt{-1}} & \mathcal{O}_{\widetilde{V}}^{\mathrm{hol}\,*} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \curvearrowright & \downarrow & \curvearrowright & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z}^{\mathrm{hol}} & \xrightarrow{\exp 2\pi\sqrt{-1}} & \mathcal{O}_{Z}^{\mathrm{hol}\,*} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

1.4.11 より Z は $\widetilde{V}$ の変位レトラクトであるから $H^2(\widetilde{V}, \mathbb{Z}) \simeq H^2(Z, \mathbb{Z})$，また有理性より $H^i(\widetilde{V}, \mathcal{O}_{\widetilde{V}}^{\mathrm{hol}}) = 0$ $(i > 0)$．さらに 6.3.1 の証明より $H^1(Z, \mathcal{O}_Z^{\mathrm{hol}}) = 0$ となるので完全可換図式：

(6.3.2.1)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = H^1(\widetilde{V}, \mathcal{O}_{\widetilde{V}}^{\mathrm{hol}}) & \longrightarrow & H^1(\widetilde{V}, \mathcal{O}_{\widetilde{V}}^{\mathrm{hol}\,*}) & \longrightarrow & H^2(\widetilde{V}, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(\widetilde{V}, \mathcal{O}_{\widetilde{V}}^{\mathrm{hol}}) = 0 \\ \wr\downarrow & & \downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ 0 = H^1(Z, \mathcal{O}_Z^{\mathrm{hol}}) & \longrightarrow & H^1(Z, \mathcal{O}_Z^{\mathrm{hol}\,*}) & \longrightarrow & H^2(Z, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r & \longrightarrow & H^2(Z, \mathcal{O}_Z^{\mathrm{hol}}) = 0 \end{array}$$

を得る．したがって $H^1(\widetilde{V}, \mathcal{O}_{\widetilde{V}}^{\mathrm{hol}\,*}) \longrightarrow \mathbb{Z}^r$, $\mathcal{L} \mapsto (\deg \mathcal{L}|_{E_1}, \cdots, \deg \mathcal{L}|_{E_r})$ は同型となる．さて V 上の任意のヴェイユ因子 D に対して 6.1.16 により $f^*D \in \mathrm{Div}\,(\widetilde{V}) \otimes \mathbb{Q}$ が定義された．適当な $m \in \mathbb{N}$ をとれば $mf^*D \in \mathrm{Div}\,(\widetilde{V})$ となり $mf^*D \cdot E_i = 0$ $(i = 1, \cdots, r)$ であるので，上で得た同型により $\widetilde{V}$ 上で

$mf^*D \sim 0$. したがって mD はカルティエ因子になる．

特に K_X に対し整数 $r > 0$ が存在して rK_X は解析的近傍上でカルティエ因子であるから森の定理 [Fo, 6.12, p.35] により，代数的因子としてもカルティエ因子である．

次に紹介する定理のために補題を準備しておこう．

補題 6.3.3 (Lichtenbaum [Li])　非特異曲面上の完備な正因子 $Z = \sum_{i=1}^r r_i E_i$ に対して $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ が成立しているとする．$\mathcal{F}$ を Z 上の可逆層とし $d_i = \deg \mathcal{F}|_{E_i} \geq 0$ $({}^\forall i)$ とすると

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(Z, \mathcal{F}) = \sum r_i d_i + 1$$
$$H^1(Z, \mathcal{F}) = 0.$$

2 次元有理特異点においては基本サイクルがその構造に密接にかかわってくる．

定理 6.3.4　2 次元有理特異点 (X, x) の特異点解消 $f : Y \to X$ について次が成立する．ただし Z_f は Y 上の基本サイクルとする．

(i)　$\mathcal{O}_Y(-nZ_f) = \mathfrak{m}_{X,x}^n \mathcal{O}_Y$

(ii)　$H^0(nZ_f, \mathcal{O}_{nZ_f}) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^n$

(iii)　$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_{X,x}^n/\mathfrak{m}_{X,x}^{n+1} = -nZ_f^2 + 1$

[証明]　x の十分小さな解析近傍 V をとり，$\widetilde{V} = f^{-1}(V)$ とする．点 $y \in Z_f$ において $\mathcal{O}_Y(-Z_f)_y = \mathcal{O}_{\widetilde{V}}^{\mathrm{hol}}(-Z_f)_y \cap \mathcal{O}_{Y,y}$, $\mathfrak{m}_{X,x}\mathcal{O}_{Y,y} = (\mathfrak{m}_{V,x}^{\mathrm{hol}})\mathcal{O}_{\widetilde{V},y}^{\mathrm{hol}} \cap \mathcal{O}_{Y,y}$, また $H^0(nZ_f, \mathcal{O}_{nZ_f}) = H^0(nZ_f, \mathcal{O}_{nZ_f}^{\mathrm{hol}})$, $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^n = \mathcal{O}_{V,x}^{\mathrm{hol}}/(\mathfrak{m}_{v,x}^{\mathrm{hol}})^n$, $\mathfrak{m}_{X,x}^n/\mathfrak{m}_{X,x}^{n+1} = (\mathfrak{m}_{V,x}^{\mathrm{hol}})^n/(\mathfrak{m}_{V,x}^{\mathrm{hol}})^{n+1}$ により次を示せば十分．

(i)　$\mathcal{O}_V^{\mathrm{hol}}(-nZ_f) = (\mathfrak{m}_{V,x}^{\mathrm{hol}})^n \mathcal{O}_V$

(ii)　$H^0(nZ_f, \mathcal{O}_{nZ_f}) = \mathcal{O}_{V,x}^{\mathrm{hol}}/(\mathfrak{m}_{V,x}^{\mathrm{hol}})^n$

(iii)　$\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{V,x}^{\mathrm{hol}})^n/(\mathfrak{m}_{V,x}^{\mathrm{hol}})^{n+1} = -nZ_f^2 + 1$.

以下，記号 hol は省略しよう．

(i) の証明.　$n=1$ のとき証明すれば十分. まず $\mathfrak{m}_{V,x}\mathcal{O}_{\widetilde{V}}\subset\mathcal{O}_{\widetilde{V}}(-Z_f)$ を示す. 任意の $h\in\mathfrak{m}_{V,x}$ に対し, $\widetilde{V}$ 上の因子 (h) は $(h)=Y+D$ (ただし Y は $f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}=\sum_{i=1}^r E_i$ に台をもつ正因子, D は E_i を含まない非負因子) と分解できる. $(h)\cdot E_i=0$ $({}^\forall i)$ 及び $D\cdot E_i\geq 0$ $({}^\forall i)$ より $Y\cdot E_i\leq 0$ $({}^\forall i)$. したがって基本サイクルの最小性より $Z_f\leq Y$. よって $\mathfrak{m}_{V,x}\mathcal{O}_{\widetilde{V}}\subset\mathcal{O}_{\widetilde{V}}(-Z_f)$. 次に逆の包含関係を示す. 任意の $P\in Z_f$ に対し P の近傍で, $(h)=Z_f$ となっている $h\in\mathfrak{m}_{V,x}$ を見つければ良い. まず $\widetilde{V}$ を十分小さくとれば $D\cdot E_i=-Z_f\cdot E_i$ $(i=1,\cdots,r)$ をみたし, 点 P を通らないような正因子 D がとれる.

このような D に対し $(h)=Z_f+D$ となる有理関数 h が存在すれば良いのだが, これは $\mathcal{L}:=\mathcal{O}_{\widetilde{V}}(-(Z_f+D))$ が至る所 0 でない $\widetilde{V}$ 上の切断 h (i.e. $h\notin\mathfrak{m}_{\widetilde{V},y}\mathcal{L}_y({}^\forall y\in\widetilde{V})$) をもつことと同値である. これを示すために $H^0(Z_f,\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{Z_f})$ が至る所 0 でない切断 h_0 を持ち h_0 に対応する元 $\widetilde{h}$ が $\varprojlim_n H^0(\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{nZ_f})$ に存在することをいえばよい. なぜなら [EGAIII, 4.2.1] により h_0 に対応する $h\in H^0(\widetilde{V},\mathcal{L})$ が存在し, h_0 が至る所0でないことより, h が至る所0でないことがわかるからである. (6.3.2.1) により $H^1(nZ_f,\mathcal{O}^*_{nZ_f})\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}^r$ となるので, $-(Z_f+D)\cdot E_i=0$ $({}^\forall i)$ より $\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{nZ_f}\simeq\mathcal{O}_{nZ_f}$ がわかる. よって $n=1$ のとき h_0 が存在する. 完全列 $0\to\mathcal{O}_{Z_f}(-nZ_f)\to\mathcal{O}_{(n+1)Z_f}\to\mathcal{O}_{nZ_f}\to 0$ から $H^0(\mathcal{O}_{(n+1)Z_f})\xrightarrow{\beta_n}H^0(\mathcal{O}_{nZ_f})\to H^1(\mathcal{O}_{Z_f}(-nZ_f))$ を得るが $-nZ_f\cdot E_i\geq 0$ より 6.3.3 を用いて, $H^1(\mathcal{O}_{Z_f}(-nZ_f))=0$ を得る. これで任意の n について β_n が全射となるので $\widetilde{h}\in\varprojlim_n H^0(Z_f,\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_{nZ_f})$ が構成できた.

(ii) の証明.　完全列 $0\to\mathcal{O}_{\widetilde{V}}(-nZ_f)\to\mathcal{O}_{\widetilde{V}}\to\mathcal{O}_{nZ_f}\to 0$ より

(6.3.4.1)
$$\begin{array}{ccccccc} 0\longrightarrow & f_*\mathcal{O}_{\widetilde{V}}(-nZ_f) & \longrightarrow & f_*\mathcal{O}_{\widetilde{V}} & \xrightarrow{\gamma} & H^0(\mathcal{O}_{nZ_f}) & \longrightarrow R^1f_*\mathcal{O}_{\widetilde{V}}(-nZ_f) \\ & \cup & & \| & & & \\ & \mathfrak{m}^n_{V,x} & & \mathcal{O}_V & & & \end{array}$$

を得るが, 上で示したことにより γ は全射, よって $\mathcal{O}_V/\mathfrak{m}^n_{V,x}\xrightarrow{\overline{\gamma}}H^0(\mathcal{O}_{nZ_f})$ は全射である. $\overline{\gamma}$ が単射であることを示すために, $g\in\mathcal{O}_V$ が $\widetilde{V}$ 上で $(g)=nZ_f+D$ $(D\geq 0)$ となっているとき $g\in\mathfrak{m}^n_{V,x}$ を示せば良い. まず D と各 E_i が横断的に

交わっている場合，分割 $D = D_1 + \cdots + D_n$ で $D_\nu \cdot E_i = -Z_f \cdot E_i$ $({}^\forall\nu, {}^\forall i)$ なるものを得る．よって前の議論により $(f_\nu) = Z_f + D_\nu$ なる関数 f_ν $(\nu = 1, \cdots n)$ を得る．明らかに $f_\nu \in \mathfrak{m}_{V,x}$ であり，$g = f_1 \cdot \cdots \cdot f_n u$ (u は $\mathcal{O}_V$ の単元) となっているので，$g \in \mathfrak{m}_{V,x}^n$. 一般の g に対しては，上記の横断性をもつ g_1 をとり $g_2 = g + a g_1$ をつくると，適当な a に対して g_2 も横断性をもつ．よって $g_2 \in \mathfrak{m}_{V,x}^n$ となり $g \in \mathfrak{m}_{V,x}^n$ を得る．

(iii) の証明．　(ii) で示された同型により (6.3.4.1) において $\mathfrak{m}_{V,x}^n = f_*\mathcal{O}(-nZ_f)$ がわかる．完全列

$$0 \to \mathcal{O}(-(n+1)Z_f) \to \mathcal{O}(-nZ_f) \to \mathcal{O}_{Z_f}(-nZ_f) \to 0$$

より，

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & f_*(-(n+1)Z_f) & \longrightarrow f_*\mathcal{O}(-nZ_f) & \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{Z_f}(-nZ_f)) \\ & \| & \| & \\ & \mathfrak{m}^{n+1} & \mathfrak{m}^n & \\ \longrightarrow & R^1 f_*\mathcal{O}(-(n+1)Z_f) & & \\ & \| & & \\ & 0 & & \end{array}$$

を得るので，$H^0\big(\mathcal{O}_{Z_f}(-nZ_f)\big) = \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$.

補題 6.3.3 より $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} = -\sum r_i(nZ_f \cdot E_i) + 1 = -nZ_f^2 + 1$

系 6.3.5　2 次元有理特異点 (X, x) に対し，次が成立する

(i)　$\mathrm{mult}(X, x) := \mathrm{mult}\mathcal{O}_{X,x} = -Z_f^2$

(ii)　$\mathrm{emb}(X, x) = -Z_f^2 + 1$

ただし $\mathbb{C}$ 上の局所代数 R で $R/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$ なるものの**重複度** (multiplicity) $\mathrm{mult}\, R$ は $\dim R = d$ として

$$\dim_{\mathbb{C}} R/\mathfrak{m}^n = \frac{\mathrm{mult}\, R}{d!} n^d + O(n^{d-1})$$

で与えられる ([Ma2, §14]).

一方埋め込み次元 (embedding dimension) $\mathrm{emb}(X, x)$ とは $(X, x) \simeq (Y, y)$, $(Y, y) \subset (\mathbb{C}^k, 0)$ となる最小の次元 k のことである．

［証明］ 6.3.4 (iii) より $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^n = -\frac{Z_f^2}{2}n^2 + 1$ 次式 となる．また次の補題より $\operatorname{emb}(X,x) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2 = -Z_f^2 + 1$.

補題 6.3.6　$\operatorname{emb}(X,x) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$

［証明］ $(X,x) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ とすると $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}^n,0}/\mathfrak{m}_{\mathbb{C}^n,0}^2 \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ は全射であるから，$\operatorname{emb}(X,x) \geq \dim \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$.

逆 $\leq$ を示すために $\dim \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2 = k$ として埋め込み $(X,x) \subset (\mathbb{C}^k, 0)$ があることを示そう．今 $(X,x) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ として，n が最小とする．

$n > k$ として，矛盾を出そう．$\mathbb{C}^n$ の座標を $x_1, \cdots, x_n$ とする．$n > k$ より $\operatorname{Ker}\left(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}^n,0}/\mathfrak{m}_{\mathbb{C}^n,0}^2 \to \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2\right) \neq 0$ であるから $(a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$ が存在して $\sum a_i x_i \equiv z \pmod{\mathcal{I}_X}$, $z \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^n,0}^2$. ここで $\mathcal{I}_X$ は X の定義イデアルとする．$z_1 := \sum a_i x_i - z$ とおくと陰関数の定理より z_1 を含む $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ なる座標が原点の近傍でとれる．しかも z_1 の定義より $z_1 \in \mathcal{I}_X$ であるから $\mathcal{O}_{X,x} = \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(z_1)\right)/\left(\mathcal{I}_{X,0}/(z_1)\right)$ より (X,x) は $z_1 = 0$ で定義される超曲面 $(\mathbb{C}^{n-1}, 0)$ に含まれる．よって n の最小性に反する．

6.4　商特異点

この節では2次元商特異点について論ずるが，まず一般的な準備をするので 6.4.1 から 6.4.10 までは多様体の次元 n は任意とする．まず商ということをはっきりさせよう．

定義 6.4.1　代数群 G が代数的整多様体 X に作用しているとする (cf. 3.4.3). 代数多様体の射 $\phi\colon X \to Y$ が G による**幾何学的商** (geometric quotient) であるとは次をみたすことである：

(1)　次は可換である；

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow p_2 & & \downarrow \phi \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

(2) 任意の点 $y \in Y$ に対し，$\phi^{-1}(y)$ はただ 1 つの軌道からなる．

(3) $U \subset Y$ が開集合 $\Longleftrightarrow \phi^{-1}(U)$ が開集合

(4) $f \in \Gamma(U, \phi_* \mathcal{O}_X)$ が $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ に入る $\Longleftrightarrow$. 次の図式が可換

$$\begin{array}{ccc} G \times \phi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sigma} & \phi^{-1}(U) \\ \downarrow p_2 & & \downarrow f \\ \phi^{-1}(U) & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \end{array}$$

$\phi : X \to Y$ が幾何学的商であるとき Y を X/G と表す．

命題 6.4.2 ([GIT, 1, §2]) G が有限群，X がアフィン多様体のとき，幾何学的商 $\phi : X \to Y$ は存在し，有限射である．$Y = X/G$ は $A(X)^G$ をアフィン環にもつアフィン多様体である．ただし，$A(X)^G$ は自己同型 $X \to X, x \mapsto \sigma(g, x)$ $g \in G$ によってひきおこされる同型 $A(X) \xrightarrow{g^*} A(X)$ によって不変な元全体からなる部分環である．X が正規なら X/G も正規になる．

次に解析空間の場合に考えよう．X が解析空間である場合にも同様に有限群 G の作用や幾何学的商が定義され G が有限群の場合，同様に幾何学的商は存在する．

命題 6.4.3 G が有限群，X が解析空間のとき幾何学的商 $\phi : X \to Y$ は存在し，$\mathcal{O}_Y = \phi_* \mathcal{O}_X{}^G$.

定義 6.4.4 特異点 (X, x) が**商特異点** (quotient singularity) であるとは，非特異な (V, v) と解析近傍 V に作用する有限群があって $(X, x) = (V/G, \phi(v))$ となっていることである．

商特異点を定める群 G は，次の定理により線型群にできることがわかる．

定理 6.4.5 任意の n 次元商特異点 (X, x) に対して有限部分群 $G' \subset GL(n, \mathbb{C})$ が存在し，芽としての同型 $(X, x) \simeq (\mathbb{C}^n / G', 0)$ がある．とくに商特異点は代

数的である.

[証明]　$(X, x) = \bigl(V/G, \phi(v)\bigr)$ としよう. v の安定化群 $G_v := \{g \in G \mid gv = v\}$ が G と一致しない場合 v の近傍 V' を適当にとれば $X = V'/G_v$ となっているので $G_v = G$ として良い. v は G の作用で固定されているので v の極大イデアル $\mathfrak{m}$ を不変にする. したがって任意の元 $g \in G$ はベクトル空間の同型 $g' : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ を引きおこす. V の v での座標を $x_1, \cdots, x_n$ とし, $y_i = \frac{1}{\# G} \sum_{g \in G} g'^{-1} \cdot g(x_i)$ とおくと $\det\bigl(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\bigr)(v) = 1$ であるので $y_1, \cdots, y_n$ は新しい座標系になる. この座標系により $g \in G$ は線型になる. 実際 $g'(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j$ とすると $g(y_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} y_j$ となることが確かめられる.

定義 6.4.6　元 $g \in GL(n, \mathbb{C})$ が**鏡映** (reflection) であるとは有限位数であって, 固定点集合 $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid g(x) = x\}$ が余次元1を持つ場合にいう. 鏡映で生成された部分群を**鏡映群** (reflection group) とよぶ. 鏡映を含まない有限部分群を**小型** (small) であるという.

補題 6.4.7　(Chevalley [Ch])　$H \subset GL(n, \mathbb{C})$ が有限鏡映群のとき $\mathbb{C}^n/H \cong \mathbb{C}^n$.

これにより鏡映群は特異点をつくるという働きの点からみると無力であることがわかる.

定理 6.4.8　任意の n 次元商特異点 (X, x) に対して小型の有限部分群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ が存在し, 芽としての同型 $(X, x) \cong (\mathbb{C}^n/G, 0)$ がある.

[証明]　6.4.5 により $(X, x) \cong (\mathbb{C}^n/G, 0)$, $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ となる. H を G に含まれる鏡映全体で生成される部分群とする. 任意の $g \in G$ と鏡映 $h \in H$ に対して

$$\mathrm{Fix}(ghg^{-1}) = g(\mathrm{Fix}(h))$$

であることがわかるので，H は正規部分群である．よって商群 $\overline{G} = G/H$ は $\mathbb{C}^n/H \cong \mathbb{C}^n$ に作用していて $\mathbb{C}^n/\overline{G} \cong (\mathbb{C}^n/H)/(G/H) \cong \mathbb{C}^n/G$ であるから，あとは $\overline{G}$ が鏡映を含まないことをいえば十分である．任意の $\overline{g} = gH \in \overline{G}$, $g \notin H$ をとると，任意の $h \in H$ に対し $hg \notin H$. したがって $\operatorname{codim}\operatorname{Fix}(hg) \geq 2$. 一方，射影 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/H$ を ϕ とすると $\overline{g}\phi(p) = \phi(p) \Longleftrightarrow gp = hp({}^{\exists}h \in H)$ であるから

$$\operatorname{Fix}(\overline{g}) = \bigcup_{h \in H} \phi\bigl(\operatorname{Fix}(hg)\bigr).$$

H は有限群であり ϕ は有限射なので，$\operatorname{codim}\operatorname{Fix}(\overline{g}) \geq 2$.

では商特異点というのはこれまで見てきた特異点の性質のうちのどのようなものをもっているのだろうか．

定理 6.4.9 商特異点は対数的端末特異点である．

［証明］ 6.4.8 より小型の有限群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ があって $(X, x) \cong (\mathbb{C}^n/G, 0)$ としてよいので射影 $\phi : \mathbb{C}^n \to X = \mathbb{C}^n/G$ は分岐因子をもたない．よって 5.2.9 (ii) より X は対数的端末特異点をもつ．

系 6.4.10 商特異点は有理的である．

［証明］ 5.2.12 より対数的端末特異点は有理的であった．

ここからは 2 次元正規特異点の議論をしよう．2 次元の場合は 6.4.9 の逆も成立する．

定理 6.4.11 2 次元正規特異点について商特異点であることと対数的端末特異点であることは同値．

[証明]　証明には少し先の知識を必要とする．(X,x) を対数的端末特異点とし，$\pi:(Y,y)\to(X,x)$ を標準被覆とする．5.2.3,(i) よりこれは分岐因子がないので 5.2.9,(ii) より Y も対数的端末特異点になる．ここで Y の指数が 1 だから標準特異点になり次の節 6.5.1 の (iv) $\Leftrightarrow$ (x) により (Y,y) は商特異点．$\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ は $Y\setminus\{y\}$ の普遍被覆空間であるから $X\setminus\{x\}$ の普遍被覆空間にもなり $\pi_{X,x}=\varprojlim\pi_1(U\setminus\{x\})$ は有限になる．6.4.18 より (X,x) は商特異点．

定義 6.4.12　特に G が有限巡回群であるとき $(\mathbb{C}^2/G,x)$ を**巡回商特異点** (cyclic quotient singularity) または **Jung 特異点** とよぶ：

巡回商特異点について考えてみよう．

補題 6.4.13　2次元巡回商特異点 $(\mathbb{C}^2/G,0)$ に対し G の生成元は $\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^q\end{pmatrix}$ として良い．ただし，ε は 1 の原始 n 乗根で，$(q,n)=1$. このときこの特異点を $X_{n,q}$ と表す．

[証明]　G は小型であるとして良い．G の位数が n とすると生成元 σ は $\sigma^n=1$ をみたすので σ の最小多項式は X^n-1 を割る．よってその根は相異なるので，σ は対角化可能である．生成元は原始 n 乗根 ε を用いて $\begin{pmatrix}\varepsilon^p & 0\\ 0 & \varepsilon^q\end{pmatrix}$ と表される．$(p,n)=d>1$ とすると $\begin{pmatrix}\varepsilon^p & 0\\ 0 & \varepsilon^q\end{pmatrix}^{\frac{n}{d}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon^{q\frac{n}{d}}\end{pmatrix}$. ここで $\varepsilon^{q\frac{n}{d}}=1$ なら生成元の位数 $<n$ となり矛盾，$\varepsilon^{q\frac{n}{d}}\neq 1$ ならこの元は鏡映となりこれも矛盾．したがって $(p,n)=1$. 同様にして $(q,n)=1$ も出る．ε^p を新たに ε とおけば良い．

不思議なことに巡回商特異点のグラフに次の連分数がかかわってくる．

補題 6.4.14　有理数 $\frac{n}{q}$ $(n>q)$ は $b_i\geq 2$ なる有限個の整数 $b_1,\cdots,b_r$ によって次のように一意的に展開される．

$$\frac{n}{q} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{b_3 - \ddots \cfrac{}{b_{r-1} - \cfrac{1}{b_r}}}}$$

これを Hirzebruch-Jung の**連分数** (continued fraction) 展開とよび，右辺を $b_1 - \underline{1}|\overline{b_2} - \underline{1}|\overline{b_3} - \cdots - \underline{1}|\overline{b_r}$ と表す．よく知られている正規連分数 $a_1 + \underline{1}|\overline{a_2} + \cdots + \underline{1}|\overline{a_s}$ とは符号が異なるので注意．

［証明］ $q_1 := q$ として $n = b_1 q_1 - q_2$ $(0 \leq q_2 < q_1)$ なる正整数 b_1 をとる．$n > q_1$ より $b_1 \geq 2$ に注意．さらに順次

$$q_1 = b_2 q_2 - q_3, \quad (0 \leq q_2 < q_1,\ b_2 \geq 2)$$
$$q_2 = b_3 q_3 - q_4, \quad (0 \leq q_3 < q_2,\ b_3 \geq 2)$$
$$\cdots\cdots$$

と分解していくと，q_i は整数であるからある $r > 0$ があって $q_{r+1} = 0$ このとき

$$\frac{n}{q} = b_1 - \underline{1}|\overline{b_2} - \cdots - \underline{1}|\overline{b_r}.$$

別の展開 $\frac{n}{q} = b'_1 - \underline{1}|\overline{b'_2} - \cdots - \underline{1}|\overline{b'_s}$ があったとする．

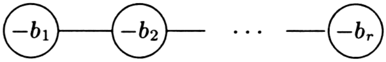
$$b'_2 - \underline{1}|\overline{b'_3} - \cdots - \underline{1}|\overline{b'_s} > 1 \text{ より,}$$

$n = b'_1 q'_1 - q'_2$ とした時 $0 \leq q'_2 < q'_1 = q$．よって $b_1 = b'_1$, $q'_2 = q_2$．同様にして順次 $b_i = b'_i$ を得る．

補題 6.4.15 (Riemenschneider [Ri1, Satz 1]) $X_{n,q}$ のアフィン環は $\mathbb{C}[u^i v^j]$, $i + qj \equiv 0 \pmod{n}$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$ である．ただし u, v は変数．

［証明］ 等式 $u^i v^j = (\varepsilon u)^i (\varepsilon^q v)^j$ をみたす i, j を求めれば良い．

定理 6.4.16 $X_{n,q}$ の最小特異点解消上の例外因子の重みつきグラフは次のようになる．ただし $\frac{n}{q} = b_1 - \underline{1}|\overline{b_2} - \cdots - \underline{1}|\overline{b_r}$



［証明］ 次のアフィン環をもつアフィン多様体を $Y_{n,q}$ とする．

$$B_{n,q} := \mathbb{C}[u^n, u^{n-q}v, v^n] \cong \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/(x_1^{n-q}x_3 - x_2^n).$$

すると 6.4.15 の $\mathbb{C}[u^iv^j]$ は $B_{n,q}$ 上整でありそれ自身正規であるので $X_{n,q}$ は $Y_{n,q}$ の正規化である．3.1.11 (iv) より $Y_{n,q}$ の特異点解消は $X_{n,q}$ の特異点解消にもなるので Hirzebruch の方法により $Y_{n,q}$ の適当な特異点解消をつくろう．

$b_1, \cdots, b_r$ を $\frac{n}{q} = b_1 - \underline{1|}\overline{b_2} - \cdots - \underline{1|}\overline{b_r}$ ととり，非特異多様体 $M = M(b_1, \cdots, b_r)$ を次のように $U_i \cong \mathbb{C}^2$ $(i = 0, \cdots, r)$ を貼り合わせてつくる．U_i の座標を (u_i, v_i) とする．

$$U_0 \cap U_1 = \{u_0 \neq 0\}, \quad u_1 = \frac{1}{u_0} \quad v_1 = u_0^{b_1}v_0$$
$$U_1 \cap U_2 = \{v_1 \neq 0\}, \quad v_2 = \frac{1}{v_1} \quad u_2 = v_1^{b_2}u_1$$
$$U_2 \cap U_3 = \{u_2 \neq 0\}, \quad u_3 = \frac{1}{u_2} \quad v_3 = u_2^{b_3}v_2$$
$$\vdots$$
$$U_{2i} \cap U_{2i+1} = \{u_{2i} \neq 0\}, \quad u_{2i+1} = \frac{1}{u_{2i}} \quad v_{2i+1} = u_{2i}^{b_{2i+1}}v_{2i}$$
$$U_{2i+1} \cap U_{2i+2} = \{v_{2i+1} \neq 0\}, \quad v_{2i+2} = \frac{1}{v_{2i+1}} \quad u_{2i+2} = v_{2i+1}^{b_{2i+2}}u_{2i+1}$$
$$\vdots$$

$E = \{v_0 = v_1 = 0\} \cup \{u_1 = u_2 = 0\} \cup \{v_2 = v_3 = 0\} \cup \cdots$ は $\mathbb{P}^1 \cup \cdots \cup \mathbb{P}^1$ なる完備な部分多様体になる．$(U_0 \cap U_1) \setminus E = \{u_0v_0 \neq 0\}$ が貼り合わせの同型でうつりゆく先を見ていけば r が奇数のとき $M = \{u_0v_0 \neq 0\} \cup E \cup \{u_0 = 0\} \cup \{v_r = 0\}$．$r$ が偶数のとき $M = \{u_0v_0 \neq 0\} \cup E \cup \{u_0 = 0\} \cup \{u_r = 0\}$ となることがわかる．r を奇数として議論を進めよう．偶数の場合は以下の議論の v_r を u_r におき換えれば良い．

ここで u_0v_0, v_0, v_r は M 上の正則関数である．実際各 U_i 上でそれぞれが

$u_i^a v_i^b$ $(a, b \geq 0)$ と表されることを見れば良い．v_r についてやってみよう．

$$
\begin{aligned}
v_r &= {u_{r-1}}^{b_r} v_{r-1} = {u_{r-2}}^{b_r} {v_{r-2}}^{b_{r-1}b_r-1} \\
&= {u_{r-3}}^{b_{r-2}(b_{r-1}b_r-1)-b_r} {v_{r-3}}^{b_{r-1}b_r-1} \\
&= {u_{r-4}}^{b_{r-2}(b_{r-1}b_r-1)-b_r} {v_{r-4}}^{b_{r-3}(b_{r-2}(b_{r-1}b_r-1)-b_r)-(b_{r-1}b_r-1)} \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

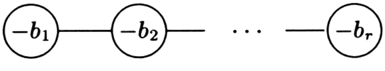
で，すべての U_i 上で u_i, v_i の指数が非負になっていることがわかる．さらに u の指数と v の指数が互いに素で，i が偶数のときは (u_i の指数)/(v_i の指数) を，i が奇数のときは (v_i の指数)/(u_i の指数) を $i = r-1$ から順に書いていくと：

$$b_r,\ b_{r-1} - \underline{1}|\overline{b_r},\quad b_{r-2} - \underline{1}|\overline{b_{r-1}} - \underline{1}|\overline{b_r}, \cdots$$

したがって U_0 上で $v_r = u_0^\alpha v_0^\beta$ とおくと

$$\alpha/\beta = b_1 - \underline{1}|\overline{b_2} - \cdots - \underline{1}|\overline{b_r}$$

さらに $(\alpha, \beta) = 1$ より $\alpha = n$, $\beta = q$ が出る．さて正則な関数 v_0, $u_0 v_0$, $v_r = u_0^n v_0^q$ が得られたので射 $\Phi : M \longrightarrow \mathbb{C}^3$ を $(u_i, v_i) \longmapsto (v_0, u_0 v_0, u_0^n v_0^q)$ で定義すると $\mathrm{Im}\,\Phi = Y_{n,q}$ となる．明らかに Φ は $\{u_0 v_0 \neq 0\}$ と $\{(x_1, x_2, x_3) \in Y_{n,q} \mid x_1 x_3 x_3 \neq 0\}$ の同型を与える．また $Y_{n,q} \setminus \{0\}$ 上では Φ は有限射であることが確かめられる．3 1.11 (iv) より Φ は $M \xrightarrow{\phi} X_{n,q} \xrightarrow{\pi} Y_{n,q}$ と，正規化 $X_{n,q}$ を経由する．ϕ は特異点以外では同型になっているので $X_{n,q}$ の特異点解消になっている．さらに φ の例外曲線は $E = \mathbb{P}^1 \cup \cdots \cup \mathbb{P}^1$ (r 個の正規交差因子) となり重みつきグラフは,



となる．実際 $\{v_0 = v_1 = 0\} \cong \mathbb{P}^1$ を E_1 とすると $\mathcal{O}_M(E_1)|_{U_0} = v_0^{-1}\mathcal{O}_{U_0}$, $\mathcal{O}_M(E_1)|_{U_1} = v_1^{-1}\mathcal{O}_{U_1}$, $v_1 = u_0^{b_1} v_0$ より $\mathcal{O}_M(E_1) \otimes \mathcal{O}_{E_1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-b_1)$. 他の素因子についても同様．さらに各 $b_i \geq 2$ より φ は最小特異点解消であることがわかる．

ここで巡回商特異点の特徴づけをあげておこう．

定理 6.4.17　2次元正規特異点 (X, x) について次は同値である：

(i)　(X, x) は巡回商特異点である．

(ii)　(X, x) はトーリック多様体の特異点である．

(iii)　最小特異点解消の例外曲線のグラフは重みを無視すれば**鎖状** (chain), すなわち　○—○— ⋯ —○—○　なる形である．

[証明] (i) ⇒ (ii).　$X_{n,q}$ のアフィン環は $\mathbb{C}[u^i v^j]$, $i + qj \equiv 0 \pmod n$. $0 \le i \le n$, $0 \le j \le n$ であった．ここで $S := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid i + qj \equiv 0 \pmod n)$ $i \ge 0, j \ge 0\}$, $M := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid i + qj \equiv 0 \pmod n)\}$ とすると $M \cong \mathbb{Z}^2$ で M は飽和部分半群 S によって生成されている．$X_{n,q}$ のアフィン環は $\mathbb{C}[S]$ となるので 3.4.12 により $X_{n,q}$ はトーリックとなる．

(ii) ⇒ (iii).　2次元アフィントーリック多様体は，$N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ の中の1つの錐 σ で定義されているが，σ の次元が 0, 1 のとき $X_{n,q}$ はそれぞれ $(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} - \{0\})^2$, $(A^1_{\mathbb{C}} - \{0\}) \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ となり非特異であるので，$\dim \sigma = 2$ の場合を考える．

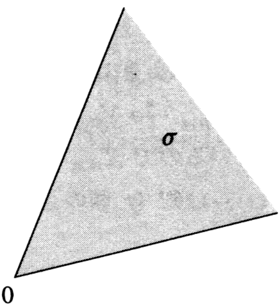


図1

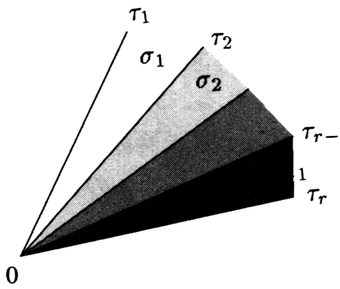
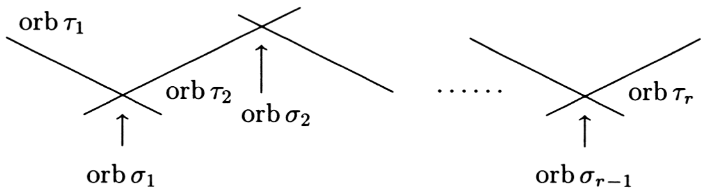


図2

2次元の錐は図1のような形をしており，これを適当に細分することによって特異点解消が得られた (図2). 図2と 3.4.12 (iii) により例外集合は



となっている．すなわちグラフが鎖状になっている．このうち (-1)-曲線を順次つぶしていくと最小特異点解消が得られやはり例外曲線のグラフは鎖状となる．

(iii) ⇒ (i).　任意の重みつき鎖状グラフ $\textcircled{-b_2}$ ―― $\cdots$ ―― $\textcircled{-b_r}$ $b_i \geq 2$ が与えられたとき $n/q = b_1 - \underline{1}|\overline{b_2} - \cdots - \underline{1}|\overline{b_r}$, $(n, q) = 1$ とおくと，6.4.16 により $X_{n,q}$ の最小特異点解消の例外曲線の重みつきグラフはこれと一致する．また [La1] により鎖状のグラフは taut (その重みつきグラフを最小特異点解消の例外集合のグラフにもつような特異点は解析的に一意的) であることが示されているので，鎖状のグラフをもつ特異点は巡回商特異点と一致する．(実は (i) と (iii) の同値性は Brieskorn [Br] により [La1] より以前に示されていた)

では一般の 2 次元商特異点についてはその特徴づけはどうであろうか．次の Brieskorn の定理がある．

定理 6.4.18　(Brieskorn [Br. Satz 2.8])　2 次元正規特異点 (X, x) について次は同値である．

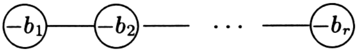
(i)　(X, x) は商特異点である．

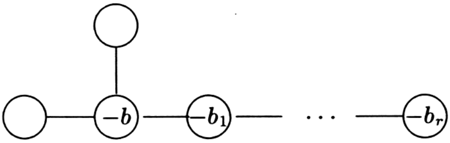
(ii)　非特異な (Y, y) と有限射 $(Y, y) \to (X, x)$ が存在する．

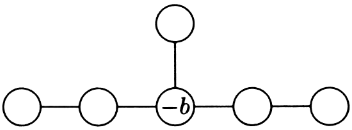
(iii)　基本群 $\pi_{X,x} := \varprojlim_{U} \pi_1(U - \{x\})$ は有限である．

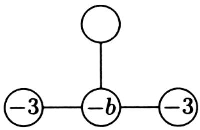
また商特異点の重みつきグラフについては次の定理がある．

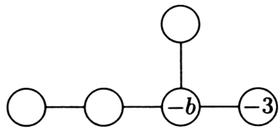
定理 6.4.19　(Brieskorn [Br, Satz 2.10])　2 次元商特異点の最小特異点解消の例外集合のグラフは次のいずれかである．逆に次のグラフを持つ特異点は一意的で，それは商特異点になる．ここで，$b, b_i \geq 2$:

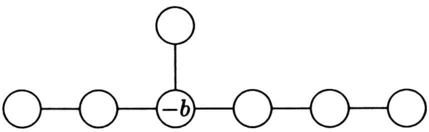

$-b_1$
$-b_2$
$\cdots$
$-b_r$

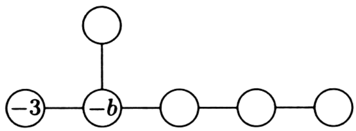

$-b$
$-b_1$
$\cdots$
$-b_r$

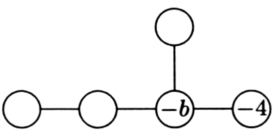

$-b$

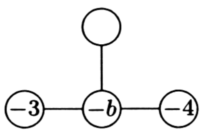

-3
$-b$
-3

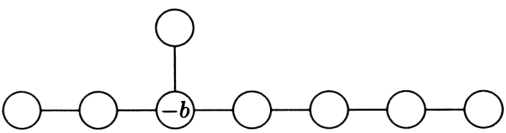

$-b$
-3

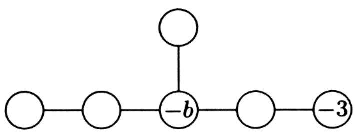

$-b$

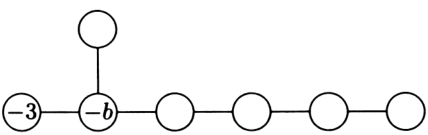

-3
$-b$

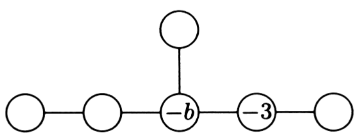

$-b$
-4

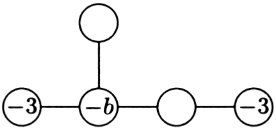

-3
$-b$
-4

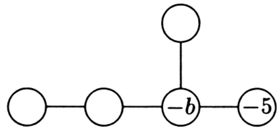

$-b$

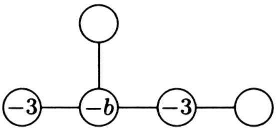

$-b$
-3

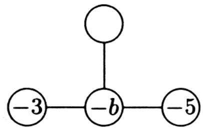

-3
$-b$


$-b$
-3









6.5 有理 2 重点

重複度 $\mathrm{mult}(X,x)=2$ (cf. 6.3.5) となる点 (X,x) を 2 重点とよぶ．2 次元の有理 2 重点は，**Du Val 特異点**, **Klein 特異点**, **単純特異点** (simple singularity) ともよばれる．その名前の数からしてもその特徴づけの多様さが伺える．この節では，有理 2 重点の特徴づけの定理を紹介する．次の定理の一部は [Du] に見られる．また次の定理に含まれない特徴づけも [Du] は述べている．参照されたい．

定理 6.5.1 (X,x) を 2 次元正規特異点とするとき，(X,x) が次の条件をみたすことは同値である：

(i) 有理 2 重点

(ii) 有理超曲面特異点

(iii) 有理 Gorenstein 特異点

(iv) 標準特異点

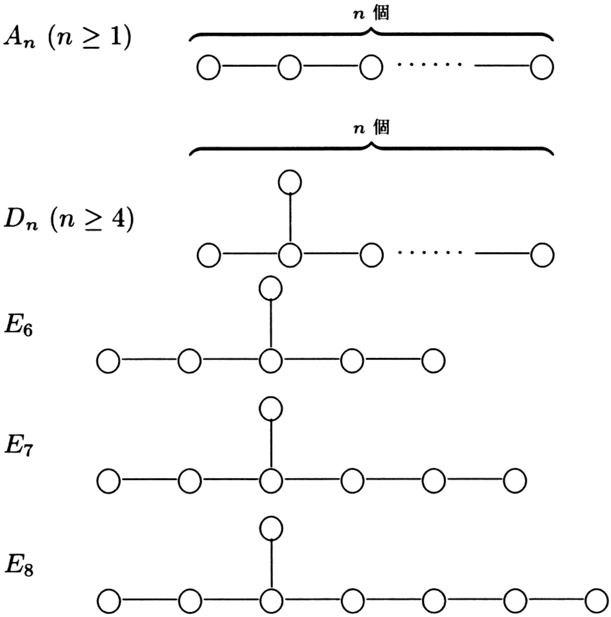
(v) $\kappa_\gamma(X,x)=-\infty$

(vi) $f:Y\to X$ を最小特異点解消とすると $K_Y=f^*K_X$

(vii) $f:Y\to X$ を最小特異点解消とすると，任意の既約例外因子 E_i は $E_i^2=-2$, $E_i\cong\mathbb{P}^1$ をみたす．

(viii) 最小特異点解消の例外集合は $\mathbb{P}^1$ の正規交差因子となり，重みつきグラフは次のいずれかである ($E_i^2=-2$ のときは重みを書かないのであった

(6.1.19))



(ix) (X, x) は $(\mathbb{C}^3, 0)$ の超曲面でありその方程式は次のいずれかである：

A_n $(n \geq 1)$	$x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$
D_n $(n \geq 4)$	$x^2 + y^2 z + z^{n-1} = 0$
E_6	$x^2 + y^3 + z^4 = 0$
E_7	$x^2 + y^3 + yz^3 = 0$
E_8	$x^2 + y^3 + z^5 = 0$

(x) 商特異点でかつ Gorenstein 特異点である．

(xi) ある有限部分群 $G \subset SL(2, \mathbb{C})$ に対し $(X, x) \simeq (\mathbb{C}^2/G, 0)$ となっている．

［証明］ (i) ⇒ (ii). 有理2重点であるから 6.3.5 (i) により，$-Z_f^2 = 2$, したがって同 (ii) より $\mathrm{emb}(X, x) = 2 + 1$.

(ii) ⇒ (iii). 一般に超曲面特異点は Gorenstein 特異点である．実際超曲面

$X \subset \mathbb{C}^{n+1}$ に対し $\mathbb{C}^{n+1}$ は Gorenstein 多様体であるから，4.3.12 より X も Gorenstein 多様体になる．

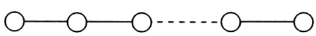
(iii) $\Rightarrow$ (iv)．5.2.15 より明らか．

(iv) $\Leftrightarrow$ (v)．$\Rightarrow$ は 5.3.12 より従う．$\Leftarrow$ はまず $\gamma_1(X,x) = p_g(X,x) = 0$ より (X,x) は有理的．よって 6.3.2 より $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点となり 5.3.12 が適用できる．

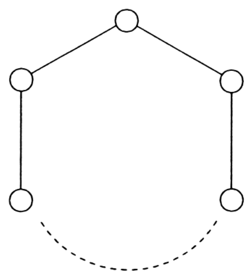
(iv) $\Leftrightarrow$ (vi)．$\Rightarrow$ は標準特異点の定義と 6.1.17 より従う．$\Leftarrow$ は (X,x) が有理的であることをいえば $\mathbb{Q}$-Gorenstein 性が出て，標準特異点の定義をみたす．2 次元正規特異点は Cohen-Macaulay であるから 5.2.14 より $f_*\omega_Y = \omega_X$ を示せば良い．今，$\subsetneq$ とすると Y 上に 2-形式 θ があって $\nu_{E_i}(\theta) < 0$ となる．よって例外曲線を含まない因子 D と $f^{-1}(x)$ に台をもち，互いに共通因子をもたない因子で $Z_1 \geq 0$, $Z_2 > 0$ なるものが存在して $\omega_Y(D + Z_1 - Z_2) \cong \mathcal{O}_Y$．したがって $K_Y \sim -D - Z_1 + Z_2$．ここで $K_Y \cdot Z_2 = -D \cdot Z_2 - Z_1 \cdot Z_2 + Z_2^2 < 0$ により $K_Y \cdot E_i = 0$ $({}^\forall i)$ に矛盾．

(vi) $\Leftrightarrow$ (vii)．6.2.8 より $E_i^2 + K_Y \cdot E_i$ は -2 以上の偶数で $= -2$ が成立することと $E_i \cong \mathbb{P}^1$ は同値．$E_i^2 < 0$ であるから，$K_Y \cdot E_i = 0$ $({}^\forall i) \Longleftrightarrow E_i^2 = -2$ かつ $E_i \cong \mathbb{P}^1$．

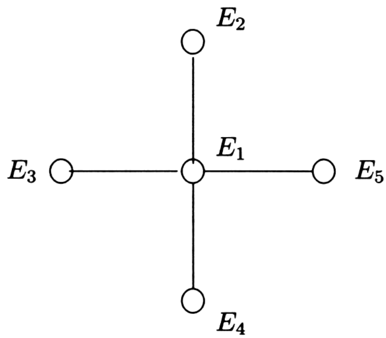
(vii) $\Leftrightarrow$ (viii)．$\Leftarrow$ は自明．$\Rightarrow$ は (viii) 以外のグラフが負定値でないことを示せば良い．負定値グラフの部分グラフはまた負定値であることに注意しよう．$f^{-1}(x)_{\mathrm{red}} = \sum_{i=1}^r E_i$ の素因子で他の 3 個以上の素因子と交わっているものがないときはグラフは



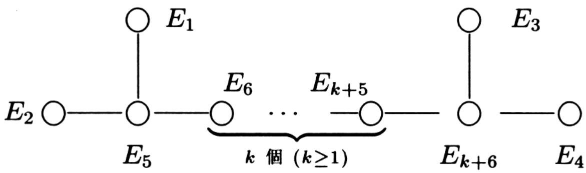
または



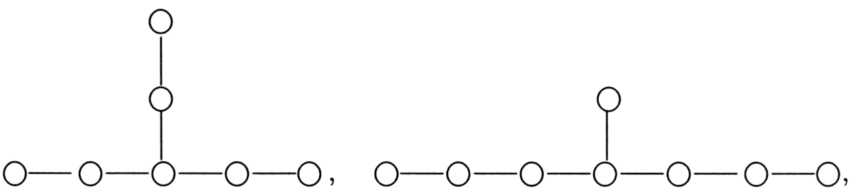
であるが後者の場合は $\left(\sum_{i=1}^r E_i\right)^2 = 0$ となり負定値性に反する．4 個以上の素因子と交わっているものがあるとするとこれは次のような部分グラフを含む．

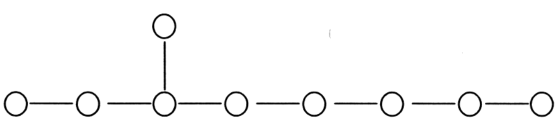


このとき $\left(2E_1+\sum_{i=2}^{5}E_i\right)^2=0$ となりこれも負定値に反するのであり得ない．ちょうど3個の他の素因子と交わっているような素因子は1つだけである．実際2つ以上あるとすると次のような部分グラフを含む．



このとき $\left(\sum_{i=1}^{4}E_i+2\sum_{i=5}^{k+6}E_i\right)^2=0$ となり矛盾．同様にして次のような部分グラフを含まないこともわかる





したがって求めるグラフの形は (viii) に示したもののみ．

(viii) ⇔ (ix)．　⇐, (ix) の各式で与えられた特異点は点の blow up を何回かくり返すことにより最小特異点解消が得られる．その例外集合の重みつきグラ

フは，(viii) のそれぞれのグラフになることが確かめられる．逆に Laufer の論文 [La1] により (viii) のグラフはすべて taut (その重みつきグラフを例外集合にもつような特異点は解析的に一意的) であるので，方程式は (ix) で与えられる．(歴史的には Brieskorn の証明の方が先である．[Br])

(ix) ⇒ (i). 式の形 (最低次数が 2) より 2 重点であることがわかり (ix) ⇔ (iv) の同値性より有理的であることがわかる．これにより (i) ~ (ix) の同値性が証明された．

(x) ⇒ (iii). 商特異点は有理的であった (6.4.8) ので明らか．

(ix) ⇔ (xi). $SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群は共役を除いて以下のように分類されている．

C_n $(n \geq 1)$	:	位数 n の巡回群
D_n $(n \geq 4)$	:	位数 $4n$ の 2 項正 2 面体群
T	:	位数 24 の 2 項正 4 面体群
O	:	位相 48 の 2 項正 8 面体群
I	:	位数 120 の 2 項正 20 面体群

Klein [Kl] はこれらを $\mathbb{C}^2$ に作用させその商が $\mathbb{C}^3$ の超曲面になることを示し，その方程式がそれぞれ (ix) の式になることを求めた (c.f. [Sp]).

(xi) ⇒ (x). $\mathbb{C}^2$ の座標関数を x, y とすると，$g \in SL(2,\mathbb{C})$ を 2 次形式 $dx \wedge dy$ に施すと $g(dx \wedge dy) = dgx \wedge dgy = \det g\, dx \wedge dy = dx \wedge dy$ よって $dx \wedge dy$ は $\mathbb{C}^2/G$ 上の零点をもたない 2 次形式になるので $\omega_{\mathbb{C}^2/G}$ の自由生成元になる．2 次元正規特異点は Cohen-Macaulay なので (X,x) は Gorenstein 特異点になる．これにより (i) ~ (xi) の同値性がいえた．((x) ⇔ (xi) は [WKi] から直接示すこともできる)

6.6 楕円型特異点

有理特異点の次に位置するものとして楕円型特異点がある．これらについて調べてみよう．

定義 6.6.1　2次元正規特異点 (X,x) が**楕円型特異点** (elliptic singularity) であるとは $p_g(X,x)=1$ となるときをいう.

“楕円型” という名前は例外因子が楕円曲線としたものにふさわしい気がする. ここではそのようなものを次のように定義する.

定義 6.6.2　2次元正規特異点 (X,x) が**単純楕円型特異点** (simple elliptic singularity) であるとは最小特異点解消 $f:Y\to X$ の例外因子 E が既約で非特異な楕円曲線 (i.e. E は非特異で $H^1(E,\mathcal{O}_E)=\mathbb{C}$ またこれは $K_E\sim 0$ と同値) であることをいう.

命題 6.6.3　単純楕円型特異点 (X,x) は楕円型特異点である. さらに Gorenstein 特異点で $\kappa_\delta(X,x)=0$ となる.

［証明］ $f:Y\to X$ を最小特異点解消, E を例外因子とすると, 完全列

$$\begin{array}{ccccc} R^1f_*\mathcal{O}_Y & \longrightarrow & H^1(E,\mathcal{O}_E) & \longrightarrow & R^2f_*\mathcal{O}_Y(-E)=0 \\ & & \| & & \\ & & \mathbb{C} & & \end{array}$$

により $p_g(X,x)\geq 1$. 今, 任意の元 $\theta\in\omega_X$ に対し $\nu_E(\theta)\geq 0$ なら 5.2.14 より (X,x) は有理特異点となって矛盾. よって $\nu_E(\theta)\leq -1$ となる $\theta\in\omega_X$ が存在する. この θ によって線型同値 $K_Y\sim D+\nu_E(\theta)E$ (ただし D は E を因子に含まない非負因子) を得る. 添加公式により $D\cdot E+(\nu_E(\theta)+1)E^2=0$. ここで $D\cdot E\geq 0$, $(\nu_E(\theta)+1)E^2\geq 0$ より共に等号が成立し $D\cap E=\phi$, $\nu_E(\theta)=-1$ を得る. 前者より (X,x) は Gorenstein 特異点, 後者より $K_Y=f^*K_X-E$ となり対数的標準特異点であって対数的端末特異点でないことがわかる. よって 5.3.12 (iii) より $\kappa_\delta(X,x)=0$ さらに任意の $m\in\mathbb{N}$ について $\delta_m(X,x)=1$. 特に $\delta_1(X,x)=p_g(X,x)=1$.

定理 6.6.4　(斉藤 [Sa, 1.9])　単純楕円型特異点 (X,x) に対し $E^2=-3,-2,-1$

となる場合にそれぞれ $\widetilde{E}_6$ 型，$\widetilde{E}_7$ 型，$\widetilde{E}_8$ 型とよぶ．これらはすべて超曲面特異点となり，その方程式は適当な座標変換により次の形になる．ただし $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0, 1$:

$$\widetilde{E}_6;\ y(y-x)(y-\lambda x) - xz^2 = 0$$
$$\widetilde{E}_7;\ yx(y-x)(y-\lambda x) - z^2 = 0$$
$$\widetilde{E}_8;\ y(y-x^2)(y-\lambda x^2) - z^2 = 0$$

逆に超曲面特異点となるような単純楕円型特異点はこれらがすべてである．

単純楕円型特異点はいかにも楕円型という名にふさわしい特異点であるが，これが楕円型特異型のすべてではない．次に Laufer の導入した最小楕円型特異点を紹介しよう．

定義 6.6.5 $f : Y \to X$ を 2 次元正規特異点 (X, x) の最小特異点解消，$E = \sum_{i=1}^{r} E_i$ を例外因子，Z_f を基本サイクルとする．$p(Z_f) = 1$ でかつ E の連結な真に小さい部分因子は有理特異点の例外因子になっているとき (X, x) を**最小楕円型特異点** (minimally elliptic singularity) とよぶ．

実際これは楕円型特異点になり次のような特徴づけがある．[HYW, 5.6] に簡潔な証明があるので見られたい．

定理 6.6.6 (Laufer [La2]) 2 次元正規特異点 (X, x) とその最小特異点解消 $f : Y \to X$ とその上の基本サイクルについて次は同値である：

(i) (X, x) は最小楕円型特異点である．

(ii) すべての既約例外因子 E_i に対して $E_i \cdot Z_f = -E_i \cdot K_Y$

(iii) $K_Y \sim -Z_f$

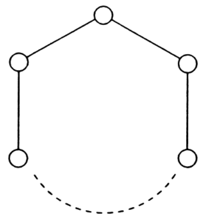
(iv) (X, x) は Gorenstein 特異点であって $p_g(X, x) = 1$ である．

例 6.6.7 単純楕円型特異点は最小楕円型特異点である．

楕円型特異点のもう一つ典型的なものを紹介しよう.

定義 6.6.8　2次元正規特異点 (X,x) の最小特異点解消 $f:Y\to X$ の例外因子 $E=\sum_{i=1}^{r}E_i$ が次をみたすとき，(X,x) を**カスプ特異点** (cusp singularity) とよぶ.

E は既約な有理曲線で正規交差特異点を1つ持つかまたは，$E_i\cong\mathbb{P}^1$ $(^\forall i=1,\cdots r)$ で E は正規交差で重みを無視すればグラフが右のような**輪状** (cycle) になる.



命題 6.6.9　カスプ特異点 (X,x) は最小楕円型特異点である. さらに $\kappa_\delta(X,x)=0$ である.

［証明］　Z_f は各成分の係数が1になることは明らかであるので $p(Z_f)=1$ はすぐにわかる. E の連結な真に小さい部分因子は鎖状になるので，6.4.19 によりそれらは商特異点の例外因子になっている. よって (X,x) は最小楕円型である. 6.6.6 (iii) より $K_Y=f^*K_X-Z_f$ であるので (X,x) は対数的標準特異点であって対数的端末特異点でない. よって 5.3.12 (iii) より $\kappa_\delta(X,x)=0$

実は Gorenstein 特異点であって $\kappa_\delta(X,x)=0$ なるものは単純楕円型か，カスプ特異点のみであることが後に示される (6.8).

6.7　2次元 Du Bois 特異点

この節では2次元 Du Bois 特異点に関する [I3] の結果を紹介する.

2次元正規特異点 (X,x) が Du Bois 特異点であるということは特異点の良解消 $f:Y\to X$ と被約な例外因子 $E=f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ (red は被約構造を表す) に対して $R^1f_*\mathcal{O}_Y\to H^1(E,\mathcal{O}_E)$ が同型になるという特徴づけがある. (7.1.14). ここではこれを Du Bois 特異点の定義と思って議論を進める. まず全射 $R^1f_*\mathcal{O}_Y\twoheadrightarrow H^1(E,\mathcal{O}_E)$ により次がわかる.

命題 6.7.1　有理特異点は Du Bois 特異点である．

定義 6.7.2　2 次元正規特異点 (X, x) とその特異点解消 $f: Y \to X$ について，2-形式 $\theta \in \Gamma(X, \omega_X) = \Gamma(X \setminus \{x\}, \omega_{X \setminus \{x\}})$ が**一般型** (general type) であるとは，f の各既約例外因子 E_i に対し $\nu_{E_i}(\theta) = \min\{\nu_{E_i}(\eta) \mid \eta \in \Gamma(X, \omega_X)\}$ をみたすことをいう．$\nu_{E_i}(\theta) \neq \nu_{E_i}(\theta')$ のとき $\nu_{E_i}(\theta + \theta') = \min\{\nu_{E_i}(\theta), \nu_{E_i}(\theta')\}$，$\nu_{E_i}(\theta) = \nu_{E_i}(\theta')$ のとき一般の ε に対して $\nu_{E_i}(\theta + \varepsilon\theta') = \nu_{E_i}(\theta)$ であることに注意すれば，ベクトル空間 $\Gamma(X, \omega_X)$ の中で一般型 2-形式の集合は稠密になることがわかる．

次は 2 次元 Du Bois 特異点の特徴づけを与える．

定理 6.7.3　(X, x) を 2 次元正規特異点，$f: Y \to X$ をその良解消，E を被約な例外因子 $f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ とする．このとき (X, x) が Du Bois 特異点であることと，一般型 2-形式が E 上で高々1 位の極を持つことは同値である．またこれは $\omega_X = f_*\omega_Y(E)$ ということと同値である．

[**証明**]　Du Bois 特異点であることは $R^1 f_*\mathcal{O}_Y \simeq H^1(E, \mathcal{O}_E)$ と同値であった．2.5.15 より $R^1 f_*\mathcal{O}_Y$ は $H^1_E(Y, \omega_Y)$ に双対となるが，完全列

$$
\begin{array}{l}
0 \longrightarrow \Gamma_E(Y, \omega_Y) \longrightarrow \Gamma(Y, \omega_Y) \longrightarrow \Gamma(Y \setminus E, \omega_Y) \longrightarrow H^1_E(Y, \omega_Y) \\
\qquad\qquad\quad \| \\
\qquad\qquad\quad 0 \\
\quad \longrightarrow H^1(Y, \omega_Y) = 0
\end{array}
$$

より $\Gamma(Y \setminus E, \omega_Y)/\Gamma(Y, \omega_Y)$ に双対となる．ここで $H^1(Y, \omega_Y) = 0$ は 5.1.11 を使った．

一方 $H^1(E, \mathcal{O}_E)$ は $\Gamma(E, \omega_E)$ に双対となるがこれは完全列

$$
0 \longrightarrow \Gamma(Y, \omega_Y) \longrightarrow \Gamma\bigl(Y, \omega_Y(E)\bigr) \longrightarrow \Gamma(E, \omega_E) \longrightarrow H^1(Y, \omega_Y) = 0
$$

により $\Gamma(Y, \omega_Y(E))/\Gamma(Y, \omega_Y)$ と等しい．したがって Du Bois であるという条件は $\Gamma(Y, \omega_Y(E)) = \Gamma(Y \setminus E, \omega_Y)$ という条件と同値である．

Du Bois 性と多重種数の関係を見てみよう．

命題 6.7.4　2次元正規特異点 (X,x) が $\delta_m(X,x) \le 1$ $({}^\forall m \in \mathbb{N})$ をみたすとき (X,x) は Du Bois 特異点になる．特に Gorenstein 特異点の場合は逆も成立する．

［証明］ 特異点 (X,x) が Du Bois でないと仮定しよう．特異点 (X,x) の良解消 $f: Y \to X$ をとると，ある 2-形式 $\theta \in \omega_X$ が存在して E 上のある素因子 E_i 上で 2 位以上の極をもつ．今勝手に $h \in \mathfrak{m}_x$ をとり $\nu_{E_i}(h) = n > 0$ とすると $\nu_{E_i}(h\theta^{m-1}) \le n - 2(m-1)$. m を十分大きくすれば 右辺 $< -(m-1)$ となるので $0 \ne h\theta^{m-1} \in \omega_X^{[m]}/f_*\omega_Y^{\otimes m}((m-1)E)$. また θ^{m-1} もこの加群で 0 でなく $\theta^{m-1}, h\theta^{m-1}$ は E_i 上の位数が異なるので $\mathbb{C}$ 上線型独立．よって $\delta_m(X,x) \ge 2$ となる．後半の主張は (7.1.18) よりしたがう．

系 6.7.5　対数的標準特異点は Du Bois 特異点である．特に単純楕円型，カスプ特異点は Du Bois 特異点である．

Du Bois 特異点の解消について調べてみよう．まず次の補題を準備する．

補題 6.7.6　$f: Y \to X$ を 2 次元正規特異点 (X,x) の良解消，E を被約な例外因子 $f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ とする．E の連結な部分因子 E' をつぶして得られる正規特異点を (X', x') とおき，その射を $g: Y \to X'$ とする．$E^* := E - E'$ とおき，被約な因子 $g(E^*)_{\mathrm{red}}$ を $\overline{E}^*$ と書く．$p := \#\{P \in E^* \mid g(P) = x'\}$ とする．このとき

(1)
$$h^1(E, \mathcal{O}_E) \le h^1(E', \mathcal{O}_{E'}) + h^1(\overline{E}^*, \mathcal{O}_{\overline{E}^*})$$

が成立する．ここで等号成立 $\Longleftrightarrow h^0(\overline{E}^*, g_*\mathcal{O}_{E^*}/\mathcal{O}_{\overline{E}^*}) = p - 1.$

［証明］ E は正規交差であるので次の完全列がある：

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{O}_{E'} \oplus \mathcal{O}_{E^*} \longrightarrow \mathcal{O}_{E' \cap E^*} \longrightarrow 0.$$

これより次の完全列を得る：

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma(E,\mathcal{O}_E) \quad &\longrightarrow \Gamma(E',\mathcal{O}_{E'})\oplus\Gamma(E^*,\mathcal{O}_{E^*}) \longrightarrow \Gamma(E'\cap E^*,\mathcal{O}_{E'\cap E^*}) \\ \longrightarrow H^1(E,\mathcal{O}_E) &\longrightarrow H^1(E',\mathcal{O}_{E'})\oplus H^1(E^*,\mathcal{O}_{E^*}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

したがって E^* の連結成分の個数を q とすると，

$$h^1(E,\mathcal{O}_E) = h^1(E',\mathcal{O}_{E'}) + h^1(E^*,\mathcal{O}_{E^*}) + p - q \tag{2}$$

を得る．次に制限射 $g' := g|_{E^*} : E^* \to \overline{E}^*$ を考えると完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{E}^*} \longrightarrow g'_*\mathcal{O}_{E^*} \longrightarrow g'_*\mathcal{O}_{E^*}/\mathcal{O}_{\overline{E}^*} \longrightarrow 0$$

より，次の完全列を得る：

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma(\overline{E}^*,\mathcal{O}_{\overline{E}^*}) \quad &\longrightarrow \Gamma(E^*,\mathcal{O}_{E^*}) \quad \longrightarrow \Gamma(\overline{E}^*, g'_*\mathcal{O}_{E^*}/\mathcal{O}_{\overline{E}^*}) \\ \longrightarrow H^1(\overline{E}^*,\mathcal{O}_{\overline{E}^*}) &\longrightarrow H^1(E^*,\mathcal{O}_{E^*}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

ここで

$$h^0(\overline{E}^*, g'_*\mathcal{O}_{E^*}/\mathcal{O}_{\overline{E}^*}) \geq p - 1 \tag{3}$$

であるから

$$h^1(E^*,\mathcal{O}_{E^*}) + p - q \leq h^1(\overline{E}^*,\mathcal{O}_{\overline{E}^*}) \tag{4}$$

を得る．(2) と (4) より

$$h^1(E,\mathcal{O}_E) \leq h^1(E',\mathcal{O}_{E'}) + h^1(\overline{E}^*,\mathcal{O}_{\overline{E}^*})$$

を得る．ここで等号が成立するのは明らかに (3) で等号が成立する場合である．

定理 6.7.7　$f : Y \to X$ を 2 次元正規 Du Bois 特異点の解消とする．E' を $E = f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ の連結な部分因子とし E' をつぶして得られる正規特異点を (X', x'), その射を $g : Y \to X'$ とすると (X', x') はまた Du Bois 特異点になり補題 6.7.6 の (1) で等号が成立する．

［証明］　自然な射 $(X', x') \to (X, x)$ を h と表そう．次の Leray スペクトル列

$$E_2^{p,q} = R^p h_*(R^q g_* \mathcal{O}_Y) \Rightarrow E^{p+q} = R^{p+q} f_* \mathcal{O}_Y$$

から次の完全列が得られる (2.6.2):

$$0 \longrightarrow R^1 h_* \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_Y \longrightarrow h_*(R^1 g_* \mathcal{O}_Y) \longrightarrow R^2 h_* \mathcal{O}_{X'} = 0.$$

したがって $\dim R^1 f_* \mathcal{O}_Y = \dim R^1 h_* \mathcal{O}_{X'} + \dim h_* R^1 g_* \mathcal{O}_Y$. ここで (X, x) は Du Bois 特異点であるから 左辺 $= h^1(E, \mathcal{O}_E)$. また X', Y は2次元であるから,

(1) $$\dim R^1 h_* \mathcal{O}_{X'} \geq h^1(\overline{E}^*, \mathcal{O}_{\overline{E}^*})$$

(2) $$\dim h_* R^1 g_* \mathcal{O}_Y \geq h^1(E', \mathcal{O}_{E'})$$

よって補題 6.7.6 により (1) (2) の等号が成立することがわかる. 特に (2) の等号より $R^1 g_* \mathcal{O}_Y \cong H^1(E', \mathcal{O}_{E'})$ が得られる.

定理 6.7.8　Du Bois 特異点の任意の解消は良解消である.

[**証明**]　$h : X' \to X$ を Du Bois 特異点 (X, x) の任意の解消とする. すると X' は (X, x) の適当な良解消 $f : Y \to X$ のいくつかの例外曲線をつぶして得られる. その射を $g : Y \to X'$ つぶれた点を $x'_1 \cdots x'_r \in X'$ とする. 6.7.7 より $h^0(\overline{E}^*, g * \mathcal{O}_{E^*}/\mathcal{O}_{\overline{E}^*}) = \sum_{i=1}^r (p_i - 1)$ ただし p_i は E^* 上で x'_i に対応している点の個数となる. これが成立するのは $\overline{E}^*$ が各 x'_i で正規交差の場合に限られる. 実際各 x'_i における $\overline{E}^*$ の重複度を m_i とすると g が何回かの点の blow up で得られていることと補題 6.7.9 より $\dim(g_* \mathcal{O}_{E^*}/\mathcal{O}_{\overline{E}^*})_{x'_i} \geq \frac{1}{2} m_i(m_i - 1) \geq \frac{1}{2} p_i(p_i - 1) \geq p_i - 1$ が成立する. ここで, 最初の等号成立 $\Longleftrightarrow$ x'_i での blow up により $\overline{E}^*$ の特異点が解消される. 二番目の等号成立 $\Longleftrightarrow$ x'_i が $\overline{E}^*$ の通常特異点 (i.e. 解析近傍が m_i と同じ数の非特異既約成分をもつ), 第三の等号成立 $\Longleftrightarrow$ $p_i = 2$ または 1, によりすべての等号が成立するのは x'_i が $\overline{E}^*$ の通常2重点つまり正規交差特異点の場合のみである.

補題 6.7.9　1次元特異点 $(C, x) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ の重複度を m とし, 点 x での blow

up を $\pi:\overline{C}\to C$ とすると $\dim_{\mathbb{C}}\pi_*\mathcal{O}_{\overline{C}}/\mathcal{O}_C=\frac{1}{2}m(m-1)$ となる．

［証明］ C の方程式に十分一般の高次の項をつけ加え，斉次化することにより C は $\mathbb{P}^2$ の既約な代数曲線で 0 にのみ特異点を持つものとして良い．$\mathbb{P}^2$ の 0 での blow up も $\pi:S\to\mathbb{P}^2$ で表すと $\overline{C}$ は S における C の狭義の逆像で $\pi^*C=\overline{C}+mE$ となる．ただし E は π の例外曲線．ここで

$$\begin{aligned}
h^1(\overline{C},\mathcal{O}_{\overline{C}}) &= 1+\frac{\overline{C}^2+K_S\cdot\overline{C}}{2}\\
&= 1+\frac{(\pi^*C-mE)^2+(\pi^*K_{\mathbb{P}^2}+E)(\pi^*C-mE)}{2}\\
&= 1+\frac{1}{2}(C^2+K_{\mathbb{P}^2}\cdot C)-\frac{1}{2}m(m-1)\\
h^1(C,\mathcal{O}_C) &= 1+\frac{1}{2}(C^2+K_{\mathbb{P}^2}\cdot C).
\end{aligned}$$

次の完全列：

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \Gamma(C,\mathcal{O}_C) & \longrightarrow & \Gamma(\overline{C},\mathcal{O}_{\overline{C}}) & \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\overline{C}}/\mathcal{O}_C \longrightarrow H^1(C,\mathcal{O}_C) \\
& \| & & \| & \\
& \mathbb{C} & & \mathbb{C} & \\
\longrightarrow & H^1(\overline{C},\mathcal{O}_{\overline{C}}) & \longrightarrow & 0, &
\end{array}$$

により $\dim\pi_*\mathcal{O}_{\overline{C}}/\mathcal{O}_C=\frac{1}{2}m(m-1)$ を得る．

例外因子の weight から Du Bois 特異点であるための十分条件が得られる．

定理 6.7.10　$f:Y\to X$ を 2 次元正規特異点 (X,x) の良解消とする．被約例外因子 $f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ を E とし $E=\sum_{i=1}^r E_i$ と既約分解しておく．このとき各 i について

$$E_i^2<-2\Big(E_i\sum_{j\neq i}E_j+\max\{g(E_i)-1,0\}\Big)$$

が成立しているとすると (X,x) は Du Bois 特異点である．

［証明］ 一般型 2-形式 θ は同型 $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \omega_Y(-D-\sum \nu_{E_i}(\theta)E_i)$ を導くので $K_Y \sim D+\sum \nu_{E_i}(\theta)E_i$ である．ただし D は E_i $(i=1\cdots r)$ を成分に含まない有効因子．$a_i=\nu_{E_i}(\theta)$ とおき $a_1=\min\{a_i\}$ とする．

$$K_Y \sim a_1E_1 + a_1\sum_{j\neq 1} E_j + \sum_{j\neq 1}(a_j-a_1)E_j + D$$

に添加公式を用いて

$$\begin{aligned} 2g(E_1)-2 &= K_Y\cdot E_1 + E_1^2 \\ &= (a_1+1)E_1^2 + a_1\sum_{j\neq 1}E_j\cdot E_1 + \sum_{j\neq 1}(a_j-a_1)E_j\cdot E_1 + D\cdot E_1 \end{aligned}$$

ここで $\sum_{j\neq 1}(a_j-a_1)E_j\cdot E_1 \geq 0$, $D\cdot E_1\geq 0$ より次を得る：

$$2g(E_1)-2 \geq (a_1+1)E_1^2 + a_1\sum_{j\neq 1}E_j\cdot E_1.$$

今 $a_1\leq -2$ とすると

$$\begin{aligned} E_1^2 &\geq 2\{g(E_1)-1\}/(a_1+1) - \{a_1/(a_1+1)\}\sum_{j\neq 1}E_j\cdot E_1 \\ &\geq -2\left(\sum_{j\neq 1}E_j\cdot E_1 + \max\{g(E_1)-1,0\}\right). \end{aligned}$$

ところがこれは定理の仮定に反する．よって $a_1\geq -1$ となり 6.7.3 より (X,x) は Du Bois 特異点となる．

この定理は例外因子の数値的条件のみで，Du Bois になるための十分条件が与えられることを示しているが，では必要十分条件も与えるのであろうか．次の例は実はそうではないことを示している．

例 6.7.11　(石井 [I3, 4.2])　2次元正規特異点 (X,x) を，次のような良解消をもつものとする． $E=f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ は $E=E_1+E_2$, E_1 は非特異楕円曲線, $E_2\cong\mathbb{P}^1$, $E_1\cdot E_2=1$, $E_1^2=-1$. このとき (X,x) が Du Bois であることと，$\mathcal{O}_{E_1}(E_1)\not\cong\mathcal{O}_{E_1}(-E_2)$ が同値である．したがって E_1 と E_2 の交わる点によって Du Bois になる場合とそうでない場合がある．

6.8　2 次元特異点の κ_δ による分類

ここでは，2 次元正規特異点を 5.3 で導入された κ_δ を用いて分類をする．目標は次の結果である．

定理 6.8.1　2 次元正規特異点は κ_δ により以下のように分類される．

κ_δ	Gorenstein 特異点	一般の特異点
$-\infty$	有理 2 重点	商特異点
0	単純楕円型特異点 カスプ特異点	単純楕円型またはカスプ特異点の有限巡回群 G による商特異点．ただし G は特異点の外では自由に作用している
2	上記以外の Gorenstein 特異点	上記以外の特異点

[証明]　有理 2 重点 $\Leftrightarrow \kappa_\delta = -\infty$, Gorenstein 特異点の証明：$\Rightarrow$ は 6.5.1 の (i) $\Rightarrow$ (iii), (i) $\Rightarrow$ (v) と $\kappa_\gamma \geq \kappa_\delta$ より，$\Leftarrow$ は 6.5.1 の (iii) $\Rightarrow$ (i) と $\delta_1 = p_g = 0$ によりしたがう．

商特異点 $\Leftrightarrow \kappa_\delta = -\infty$ の証明：6.4.11 より商特異点は対数的端末特異点と同値であった．対数的端末特異点ならば 5.3.12 より $\kappa_\delta = -\infty$. 逆に $\kappa_\delta = -\infty$ ならば $p_g = \delta_1 = 0$ より有理特異点だから，6.3.2 より $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点．よって 5.3.12 より対数的端末特異点．

単純楕円型，カスプ特異点 $\Leftrightarrow \kappa_\delta = 0$, Gorenstein 特異点の証明：$\Rightarrow$ は 6.6.3, 6.6.9 よりしたがう．$\Leftarrow$ を示そう．Gorenstein 特異点 (X, x) が $\kappa_\delta(X, x) = 0$ をみたすとき，5.3.12 より，対数的標準特異点であって $\delta_m(X, x) = 1$ ($^\forall m \in \mathbb{N}$). よって 6.7.4 より (X, x) は Du Bois 特異点．$f : Y \to X$ を最小特異点解消とすると 6.7.8 より f は良解消になる．$E = \sum E_i$ を被約な例外因子とすると $K_Y = f^*K_X - E$ より $K_E \sim 0$. このような正規交差因子 E は，非特異楕円曲線か，既約な有理曲線で正規交差特異点を 1 つ持つかまたは $E_i \cong \mathbb{P}^1$

$(^\forall i = 1, \cdots, r)$ なる輪状のいずれかであることが示される.

単純楕円形またはカスプ特異点の G による商 $\Leftrightarrow$ $\kappa_\delta = 0$ の証明：$\Rightarrow$ は 5.2.9,(ii) より明らか. $\Leftarrow$ は次の補題により $\kappa_\delta(X, x) = 0$ をみたす (X, x) は $\mathbb{Q}$-Gorenstein であることが示される. よって標準被覆 $\pi : X' \to X$ をとれば X' は Gorenstein 対数的標準特異点をもつ. 上の議論よりそれは単純楕円型かカスプ特異点である. かくして X はそれの有限巡回群による商になった.

補題 6.8.2　(石井 [I6, 3.1])　2次元正規特異点 (X, x) が $\kappa_\delta(X, x) = 0$ をみたせば $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点である. さらに $\delta_m(X, x) \neq 0$ なる最小の m を r とすると指数は r となる.

第 7 章　高次元特異点

混乱したら整理するまで
混乱したままである
(時は解決してくれない)

3 次元以上の特異点を高次元特異点とよぶことにする．この章ではおもに高次元特異点について考察するが，特にことわりのない限り特異点の次元 n は $n \geq 2$ として議論を進める．この章でも多様体はすべて $\mathbb{C}$ 上の代数的整多様体とし特異点はそのようなものの上にあるとする．

7.1　混合 Hodge 構造と Du Bois 特異点

この節では多様体はすべて $\mathbb{C}$ 上の代数多様体であるが，解析多様体としての構造を考える．すなわち代数多様体 X の位相は Zariski 位相ではなく解析空間としての位相を考え，構造層 $\mathcal{O}_X$ も解析的構造層 $\mathcal{O}_X^{\mathrm{hol}}$ を考える．GAGA [Se3] により X が完備の場合には，$H^i(X, \mathcal{O}_X^{\mathrm{hol}}) = H^i(X, \mathcal{O}_X^{\mathrm{alg}})$ となることに注意する．なお $\mathcal{O}^{\mathrm{hol}}$ などの "hol" は省略する．コホモロジー群に，Hodge 構造を考えることでさらに詳しい情報が得られる．

定義 7.1.1　有限次元実ベクトル空間 H と $H_{\mathbb{C}} := H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の分解 $H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$ が $H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$ をみたすとき，重み n の **Hodge 構造** (Hodge structure) であるという．

定義 7.1.2　有限次元実ベクトル空間 H とその上の部分空間の増大列 $W = \{W_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $H_{\mathbb{C}}$ 上の部分空間の減少列 $F = \{F^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が次をみたすとき，(H, W, F)

を混合 **Hodge 構造** (mixed Hodge structure) とよぶ：

各 k に対し $Gr_k^W(H) := W_k(H)/W_{k-1}(H)$ は重み k の Hodge 構造を持ち, $F^p(Gr_k^W(H)_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p' \geq p} H^{p',q}$ が成立する．このとき F を **Hodge filtration**, W を **weight filtration** とよぶ．特にある k に対し $Gr_i^W(H) = 0$ $(i \neq k)$ のとき **pure weight** k である，または，weight k の**純 Hodge 構造** (pure Hodge structure) とよぶ．

定義 7.1.3　(H, W, F), (H', W', F') が混合 Hodge 構造とする．準同型 $f : H \to H'$ が**混合 Hodge 構造の射** (morphism of mixed Hodge structure) であるとは，両方の filtration に関して整合性を持つこと (すなわち $f(W_i) \subset W'_i$, $f(F^i) \subset F'^i$) である．特に f から導入される準同型 $Gr_n^W(f) : Gr_n^W(H) \to Gr_n^W(H')$ により $Gr_n^W(f)(H^{p,q}) \subset H'^{p,q}$ となっている．

命題 7.1.4　$H' \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} H''$ を混合 Hodge 構造の射の列とする．これが完全列のとき，次も完全列になる：

$$\begin{array}{ccccc} Gr_i^W H' & \longrightarrow & Gr_i^W H & \longrightarrow & Gr_i^W H'' \\ Gr_F^i H' & \longrightarrow & Gr_F^i H & \longrightarrow & Gr_F^i H'' \\ H'^{p,q} & \longrightarrow & H^{p,q} & \longrightarrow & H''^{p,q} \end{array}$$

例 7.1.5　X を完備な非特異代数多様体とすると任意の k に対し $H^k(X, \mathbb{R})$ は，重み k の純 Hodge 構造を持つ (2.6.8)．この場合 Hodge のスペクトル列：

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p) \Longrightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

によって引きおこされる $H^{p+q}(X, \mathbb{C})$ 上の filtration が Hodge filtration である．

定理 7.1.6　(Deligne [De])　X を任意の代数多様体とすると任意の k に対し $H^k(X) = H^k(X, \mathbb{C})$ は混合 Hodge 構造を持ち次が成立する：

(i)　X が完備な非特異代数多様体のときそれは 7.1.5 の構造と一致する．

(ii)　任意の代数多様体の射 $f : X \to Y$ に対して引き起こされた射 f^* :

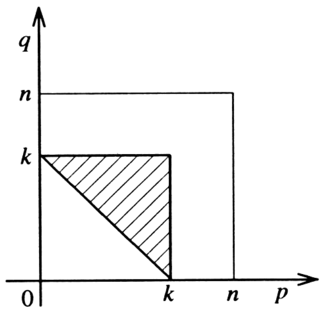
$H^k(Y) \to H^k(X)$ は混合 Hodge 構造の射になる．

(iii) $Y \subset X$ が閉 (または開) 部分多様体のとき，相対コホモロジー $H^k(X,Y) := H^k(X,Y;\mathbb{R})$ も混合 Hodge 構造を持ち，次の列が混合 Hodge 構造の完全列になる：

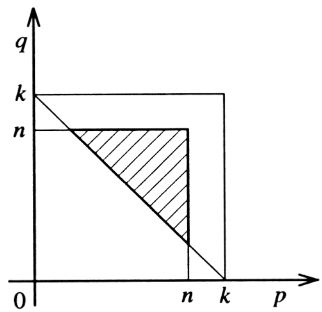
$$\cdots \longrightarrow H^k(X) \longrightarrow H^k(Y) \longrightarrow H^{k+1}(X,Y) \longrightarrow H^{k+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

(iv) $f : (X,Y) \to (X',Y')$ を対の射とすると，引き起こされた射 $f^* : H^n(X',Y') \to H^n(X,Y)$ は混合 Hodge 構造の射になる．

(v) X が n 次元非特異代数多様体であるとき $\left\{Gr_i^W\left(H^k(X)\right)_{\mathbb{C}}\right\}_{i\in\mathbb{Z}}$ に登場する $H_k^{p,q} \neq 0$ なる (p,q) は，図の斜線部 (境界も込めて) にある．

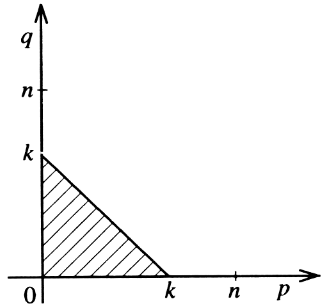


$k \leq n$ の場合

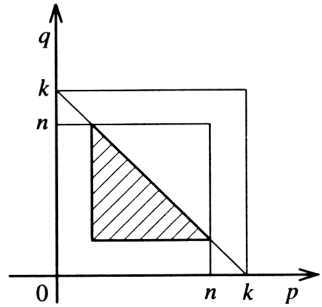


$k \geq n$ の場合

(vi) X が n 次元完備代数多様体であるとき $\left\{Gr_i^W\left(H^k(X)\right)_{\mathbb{C}}\right\}_{i\in\mathbb{Z}}$ に登場する $H_k^{p,q} \neq 0$ なる (p,q) は，図の斜線部 (境界も込めて) にある．



$k \leq n$ の場合



$k \geq n$ の場合

命題 7.1.7　$f : \widetilde{X} \to X$ を必ずしも既約でない代数多様体の固有射で，稠密開集合への制限 $f^{-1}(U) \to U$ が同型とする．$\widetilde{X}$ が非特異な多様体に埋め込まれているとする．$Y = X \setminus U, \widetilde{Y} = f^{-1}(Y)$ とすると，次の混合 Hodge 構造の完全列が存在する：

$$\cdots \longrightarrow H^k(X) \longrightarrow H^k(Y) \oplus H^k(\widetilde{X}) \longrightarrow H^k(\widetilde{Y}) \longrightarrow H^{k+1}(X) \longrightarrow \cdots .$$

［証明］ 次の混合 Hodge 構造の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to H^k(\widetilde{X}) & \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} & H^k(\widetilde{Y}) & \xrightarrow{\widetilde{\beta}} & H^{k+1}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) & \xrightarrow{\widetilde{\gamma}} & H^{k+1}(\widetilde{X}) \\
\lambda \uparrow & & \uparrow \mu & & \uparrow \nu & & \uparrow \lambda \\
\cdots \to H^k(X) & \xrightarrow{\alpha} & H^k(Y) & \xrightarrow{\beta} & H^{k+1}(X,Y) & \xrightarrow{\gamma} & H^{k+1}(X).
\end{array}$$

7.1.6,(iii) より横向きの列は，混合 Hodge 構造の完全列．ここで，$\widetilde{X}$ が非特異な多様体に埋め込まれているので，1.4.11 より $\widetilde{Y}$ は $\widetilde{X}$ のある閉近傍に変位レトラクトであることが示される．よって [Spa, Ch.4, §8, Th.9] より $\nu : H^k(X,Y) \to H^k(\widetilde{X},\widetilde{Y})$ は任意の k について同型．したがって次の混合 Hodge 構造の完全列を得る：

$$\cdots \to H^k(X) \xrightarrow{(\alpha,\lambda)} H^k(Y) \oplus H^k(\widetilde{X}) \xrightarrow{\mu-\widetilde{\alpha}} H^k(\widetilde{Y}) \xrightarrow{\gamma\circ\nu^{-1}\circ\widetilde{\beta}} H^{k+1}(X) \to \cdots .$$

命題 7.1.8　(Mayer-Vietoris 完全列)　擬射影多様体 $X = X_1 \cup X_2$ の閉集合 $X_i \subsetneq X$ $(i = 1, 2)$ に対し次の混合 Hodge 構造の完全列を得る：

$$\longrightarrow H^k(X) \longrightarrow H^k(X_1) \oplus H^k(X_2) \longrightarrow H^k(X_1 \cap X_2) \longrightarrow H^{k+1}(X) \to \cdots$$

［証明］ $X \subset \mathbb{P}^N$ とすると $X_1 \amalg X_2 \subset \mathbb{P}^N \amalg \mathbb{P}^N$ であるから $f : X_1 \amalg X_2 \to X$ に対して 7.1.7 を適用して次を得る：

$$\begin{aligned}
\cdots \to H^k(X) &\xrightarrow{(\alpha,\lambda)} H^k(X_1 \cap X_2) \oplus H^k(X_1 \amalg X_2) \\
&\xrightarrow{\mu-\widetilde{\alpha}} H^k(X_1 \cap X_2) \oplus H^k(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\gamma\circ\nu^{-1}\circ\widetilde{\beta}} \cdots
\end{aligned}$$

ここで射影 $p_2 : H^k(X_1 \cap X_2) \oplus H^k(X_1 \amalg X_2) \twoheadrightarrow H^k(X_1 \amalg X_2)$ と $id - id :$ $H^k(X_1 \cap X_2) \oplus H^k(X_1 \cap X_2) \to H^k(X_1 \cap X_2)$ により次の混合 Hodge 構造の完全列を得る.

$$\to H^k(X) \xrightarrow{\lambda = p_2 \circ (\alpha, \lambda)} H^k(X_1 \amalg X_2) \xrightarrow{(id-id)\circ\widetilde{\alpha}} H^k(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\psi} H^{k+1}(X)$$

ここで ψ は $\gamma \circ \nu^{-1} \circ \widetilde{\beta}$ が $id - id$ を経由することから得られた射である：

$$\gamma \circ \nu^{-1} \circ \widetilde{\beta} = \psi \circ (id - id).$$ (証明終)

7.1.5 で見たように完備な非特異代数多様体の Hodge filtration は，定値層 $\mathbb{C}$ の分解 $0 \to \mathbb{C} \to \Omega_X^{\cdot}$ である De Rham 複体 $\Omega_X^{\cdot}$ とその上の stupid filtration F から定義されるスペクトル列から導入されたものであった.

完備でない非特異の場合にも Deligne による構成は，そのようなものであった. (正確には X の適当なコンパクト化 $\widetilde{X}$ 上の適当なフィルター付き複体のスペクトル列から得られる)

非特異の条件をはずしたらどうであろうか. Deligne [De] の構成によると，Hodge filtration はそのように導入されたわけではなかった. そこで $\mathbb{C}$ の分解になっているような何かうまいフィルター付き複体をもってして，そのスペクトル列から Hodge filtration が得られないかという問題を考える. Du Bois はこの問題に次の解答を与えた.

定理 7.1.9 (Du Bois [DB]) 代数多様体 X に対してフィルター付き複体 $(\underline{\Omega}_X^{\cdot}, F)$ が存在して次がみたされる：

(i) $\underline{\Omega}_X^{\cdot}$ が定値層 $\mathbb{C}$ の分解になっている (i.e. $0 \to \mathbb{C} \to \underline{\Omega}_X^{\cdot}$ が完全列)

(ii) $\Omega_X^{\cdot}$ を X 上の De Rham 複体，σ をその上の stupid filtration とするとき，フィルター付き複体の射：

$$(\Omega_X^{\cdot}, \sigma) \xrightarrow{\lambda} (\underline{\Omega}_X^{\cdot}, F)$$

が存在する. 特に X が非特異のときこれはフィルター付き擬同型になる.

(iii) 特に X が完備のとき $(\underline{\Omega}_X^{\cdot}, F)$ から定義されるスペクトル列：

$$E_1^{p,q} = \mathbb{R}^{p+q}\Gamma(Gr_F^p \underline{\Omega}_X^{\cdot}) \Longrightarrow \mathbb{R}^{p+q}\Gamma(\underline{\Omega}_X^{\cdot}) = H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

は E_1-退化し $H^{p+q}(X,\mathbb{C})$ 上に引き起こされたフィルターは Deligne の Hodge filtration と同じものである．

(iv) $f:\widetilde{X}\to X$ を代数多様体の固有射，$Y\subset X$ を閉部分多様体 $\widetilde{Y}=f(Y)$, $f'=f|_{\widetilde{Y}}$ とする．$f|_{\widetilde{X}\setminus\widetilde{Y}}:\widetilde{X}\setminus\widetilde{Y}\xrightarrow{\sim}X\setminus Y$ が同型のとき，フィルター付き導来圏の中で次の triangle ([Ha1]) が存在する：

$$0\longrightarrow\underline{\Omega}^{\cdot}_X\longrightarrow\underline{\Omega}^{\cdot}_Y\oplus\mathbb{R}f_*\underline{\Omega}^{\cdot}_{\widetilde{X}}\longrightarrow\mathbb{R}f'_*\underline{\Omega}^{\cdot}_{\widetilde{Y}}\longrightarrow 0$$

すなわち各 p に対し：

$$\cdots\to\mathcal{H}^i(Gr^p_F\underline{\Omega}^{\cdot}_X)\longrightarrow\mathcal{H}^i\big(Gr^p_F(\underline{\Omega}^{\cdot}_Y\oplus\mathbb{R}f_*\underline{\Omega}^{\cdot}_{\widetilde{X}})\big)$$
$$\longrightarrow\mathcal{H}^i\big(Gr^p_F(\mathbb{R}f'_*\underline{\Omega}^{\cdot}_{\widetilde{Y}})\big)\longrightarrow\mathcal{H}^{i+1}\big(Gr^p_F\underline{\Omega}^{\cdot}_X\big)\to\cdots$$

が完全列になる．

Du Bois の複体が良い性質をもっているような点に注目しよう．

定義 7.1.10 点 (X,x) が **Du Bois 特異点**であるとは，7.1.9,(ii) の λ から引き起こされた複体の射

$$Gr^0_\sigma\Omega^{\cdot}_{X,x}\xrightarrow{Gr^0(\lambda)}Gr^0_F\underline{\Omega}^{\cdot}_{X,x}$$

が擬同型となることである．$Gr^0_\sigma\Omega^{\cdot}_X=\mathcal{O}_X$ に注意すれば，これは $0\to\mathcal{O}_{X,x}\to Gr^0_F\underline{\Omega}^{\cdot}_{X,x}$ が完全列になることと同値である．

X 上のすべての点が Du Bois 特異点になるとき X を **Du Bois 多様体**とよぶ．以後 Du Bois の論文に従い $Gr^0_F\underline{\Omega}^{\cdot}_X$ を $\underline{\Omega}^0_X$ と表す．

次の命題は Du Bois 特異点のみたす基本的な性質である．

命題 7.1.11 (i) 非特異点は Du Bois 特異点である．

(ii) X が非特異多様体上の正規交差因子であるとき，X は Du Bois 多様体である．

(iii) X が完備な Du Bois 多様体であるとき，$H^i(X,\mathbb{C})$ 上の Hodge filtration を F と書くと，同型

$$H^i(X,\mathcal{O}_X)\simeq Gr_F^0 H^i(X,\mathbb{C})$$

がある.

[証明]　(i) は，7.1.9,(ii) より明らか．(ii) は (i) と 7.1.9,(iv) より従う．簡単な場合を見てみよう．$X=X_1\cup X_2$, X_i は非特異とする．$f:X_1\amalg X_2\to X_1\cup X_2$ を正規化とする．$Y:=X_1\cap X_2$ とおく．7.1.9,(iv) より次の完全列を得る．

$$\begin{aligned}0&\longrightarrow \mathcal{H}^0(\underline{\Omega}_X^0)\longrightarrow \mathcal{H}^0(\underline{\Omega}_Y^0)\oplus\mathcal{H}^0(\mathbb{R}f_*\underline{\Omega}^0_{X_1\amalg X_2})\longrightarrow \mathcal{H}^0(\mathbb{R}f_*\underline{\Omega}^0_{Y\amalg Y})\\&\longrightarrow \mathcal{H}^1(\underline{\Omega}_X^0)\longrightarrow \mathcal{H}^1(\underline{\Omega}_Y^0)\oplus\mathcal{H}^1(\mathbb{R}f_*\underline{\Omega}^0_{X_1\amalg X_2})\longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{R}f_*\underline{\Omega}^0_{Y\amalg Y})\\&\longrightarrow\cdots\cdots\end{aligned}$$

(i) によりこの列は次のようになる：

$$\begin{aligned}0&\longrightarrow \mathcal{H}^0(\underline{\Omega}_X^0)\longrightarrow \mathcal{O}_Y\oplus f_*(\mathcal{O}_{X_1}\oplus\mathcal{O}_{X_2})\longrightarrow f_*(\mathcal{O}_Y\oplus\mathcal{O}_Y)\\&\longrightarrow \mathcal{H}^1(\underline{\Omega}_X^0)\longrightarrow 0,\\&\qquad\qquad \mathcal{H}^i(\underline{\Omega}_X^0)=0\quad (i\geq 2).\end{aligned}$$

一方次の完全列：

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{O}_Y\oplus f_*\mathcal{O}_{X_1}\oplus f_*\mathcal{O}_{X_2}\longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y\oplus f_*\mathcal{O}_Y\longrightarrow 0$$

により $\mathcal{H}^0(\underline{\Omega}_X^0)\cong\mathcal{O}_X$, $\mathcal{H}^i(\underline{\Omega}_X^0)=0$ $(i\geq 1)$ を得る．(iii) は 7.1.9,(iii) により $Gr_F^0H^i(X,\mathbb{C})=E_1^{0,i}=\mathbb{R}^i\Gamma(\underline{\Omega}_X^0)$. ところが右辺は，$X$ が Du Bois であるので $H^i(X,\mathcal{O}_X)$ と同型.

命題 7.1.12　正規孤立特異点 (X,x) の部分解消 $f:\widetilde{X}\to X$ に対し $E=f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ が Du Bois 多様体であるとき，任意の $i>0$ に対して自然な準同型：

$$(R^if_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}})_x\longrightarrow H^i(E,\mathcal{O}_E)$$

は全射である.

[証明]　X を十分小さいスタイン近傍とする．可換図式：

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}_{\widetilde{X}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}_E & \longrightarrow & \mathcal{O}_E \end{array}$$

から可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^i(\widetilde{X},\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^i(\widetilde{X},\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ H^i(E,\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^i(E,\mathcal{O}_E) \\ & \gamma\searrow & \downarrow\delta \\ & & Gr_F^0 H^i(E,\mathbb{C}) \end{array}$$

を得る．ここで F は $H^i(E,\mathbb{C})$ の Hodge filtration. 1.4.11 より E は $\widetilde{X}$ の変位レトラクトであるから α は同型．$F^0H^i(E,\mathbb{C}) = H^i(E,\mathbb{C})$ であるから，γ は全射になり E が完備な Du Bois 多様体であることより δ は同型になる．これより β の全射性が出る．

正規孤立特異点の場合に Du Bois 性は解消においてどんな性質でいい替えられるのだろうか．

命題 7.1.13　正規孤立特異点 (X,x) の部分解消 $f:\widetilde{X}\to X$ に対し $\widetilde{X}$, $E = f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ が共に Du Bois 多様体であるとする．このとき次は同値である：

(i)　(X,x) は Du Bois 特異点である；

(ii)　自然な準同型

$$(R^i f_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}})_x \longrightarrow H^i(E,\mathcal{O}_E)$$

が任意の $i>0$ に対し同型になる．

［証明］ 射 f に 7.1.9 の (iv) を適用する．$\widetilde{X}$ も E も Du Bois 多様体であるから次の完全列を得る：

$$
\begin{array}{llll}
0 \longrightarrow \mathcal{H}^0(\underline{\Omega}^0_X) & \longrightarrow & f_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \oplus \mathbb{C}_x & \longrightarrow f_*\mathcal{O}_E \\
\quad\longrightarrow \mathcal{H}^1(\underline{\Omega}^0_X) & \longrightarrow & R^1 f_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} & \longrightarrow R^1 f_*\mathcal{O}_E \\
 & \cdots\cdots\cdots & & \\
\quad\longrightarrow \mathcal{H}^i(\underline{\Omega}^0_X) & \longrightarrow & R^i f_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} & \longrightarrow R^i f_*\mathcal{O}_E \\
\quad\longrightarrow \cdots & & &
\end{array}
$$

(X,x) が Du Bois であることと $\mathcal{H}^0(\underline{\Omega}^0_X)_x \simeq \mathcal{O}_{X,x}$, $\mathcal{H}^i(\underline{\Omega}^0_X)_x = 0$ $({}^\forall i > 0)$ が同値であったので，命題の同型を得る．

系 7.1.14　有理孤立特異点は Du Bois 特異点である．

［証明］ 良特異点解消 $f : \widetilde{X} \to X$ に対して $R^i f_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} = 0$ $(i > 0)$ が成立しているので，7.1.12 より $R^i f_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \to H^i(E, \mathcal{O}_E)$ $(i > 0)$ は同型になり 7.1.13 より Du Bois 特異点である．

では孤立していない有理特異点についてはどうであろうか．射影多様体の有理特異点については次が示される．

命題 7.1.15　(Kollár-Steenbrink [Kol, 12.9])　X を高々有理特異点を持つ射影多様体とすると X は Du Bois 多様体である．

Du Bois という性質は有限群による商をとっても変わらない．

命題 7.1.16　正規孤立特異点 (Y,y) が Du Bois 特異点とすると，(Y,y) の有限群 G による商 (Y,x) も Du Bois 特異点になる．

［証明］ 点 y が G で固定されているとして良い．X を十分小さい x の近傍とする．$f : \widetilde{X} \to X$ を特異点 (X,x) の良解消とする．$Y \times_X \widetilde{X}$ には G が自然に作用しているので，3.3.4 より $Y \times_X \widetilde{X}$ の良解消 $g : \widetilde{Y} \to Y \times_X \widetilde{X}$ で $\widetilde{Y}$ に自然に G が作用しているものがとれる．$\widetilde{X}$ では，G の作用は自明であるから，次の可換図式が得られる：

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X = Y/G \\ {\scriptstyle f' = p_1 \circ g}\Big\uparrow & & \Big\uparrow {\scriptstyle f} \\ \widetilde{Y} & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ & \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle h} & \\ & \widetilde{Y}/G & \end{array}$$

ここで h は開集合上で同型となる固有射で，$\widetilde{X}$ は非特異，$\widetilde{Y}/G$ は高々商特異点しか持たないから $R^i h_* \mathcal{O}_{\widetilde{Y}/G} = 0$ $(i > 0)$．したがって Leray のスペクトル列：

$$E_2^{p,q} = H^p(\widetilde{X}, R^q h_* \mathcal{O}_{\widetilde{Y}/G}) \Longrightarrow H^{p+q}(\widetilde{Y}/G, \mathcal{O}_{\widetilde{Y}/G})$$

で $E_2^{p,q} = 0$ $(q > 0)$ がいえるので，$H^i(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \cong H^i(\widetilde{Y}/G, \mathcal{O}_{\widetilde{Y}/G})$．一方 $H^i(\widetilde{Y}/G, \mathcal{O}_{\widetilde{Y}/G}) = H^i(\widetilde{Y}, \mathcal{O}_{\widetilde{Y}})^G$．$f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ を E，$f'^{-1}(y)_{\mathrm{red}}$ を F とおくと，全射 $F \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow E$ により準同型 $H^i(E, \mathcal{O}_E) \to H^i(F, \mathcal{O}_F)$ が存在する．よって可換図式：

$$\begin{array}{ccccc} R^i f'_* \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}^G & \xrightarrow{\alpha} & H^i(F, \mathcal{O}_F)^G & & \\ \wr\Big| & & \Big\uparrow & & \\ R^i f_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}} & \xrightarrow[\beta]{} & H^i(E, \mathcal{O}_E) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を得る．ここで (Y, y) は Du Bois 特異点であったから $R^i f'_* \mathcal{O}_{\widetilde{Y}} \xrightarrow{\sim} H^i(F, \mathcal{O}_F)$ $(i > 0)$ となり α が単射になる．よって β の単射性が得られる．

次に Du Bois という性質と不変数 δ_m の関係を見てみよう．

定理 7.1.17 (石井 [I2], 渡辺 [W2])　正規孤立特異点 (X, x) が 1-Gorenstein であるとする．このとき次は同値．

(i)　(X, x) は Du Bois 特異点である．

(ii)　$\kappa_\delta(X, x) \le 0$.

(iii)　$\delta_m(X, x) \le 1$　$({}^\forall m \in \mathbb{N})$

(iv)　(X, x) は対数的標準特異点である．

［証明］ 1-Gorenstein 特異点であるので 5.3.12 より (ii) (iii) (iv) の同値性は明らか．

(i) ⇒ (iv): $f : \widetilde{X} \to X$ を特異点 (X, x) の良解消とする．$E = f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ とすると (X, x) は Du Bois 特異点であるから特に，

$$(1) \qquad R^{n-1}f_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \simeq H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E).$$

ここで 6.7.3 の証明と同様に，$R^{n-1}f_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ は $H^1_E(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}})$ と双対となるが，完全列：

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \Gamma_E(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{X} \setminus E, \omega_{\widetilde{X}}) \longrightarrow H^1_E(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}) \\ \qquad\qquad \| \\ \qquad\qquad 0 \\ \quad \longrightarrow H^1(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}) = 0 \end{array}$$

より $\Gamma(\widetilde{X} \setminus E, \omega_{\widetilde{X}})/\Gamma(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}})$ に双対となる．一方 $H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)$ は $\Gamma(E, \omega_E)$ に双対となるが，これは完全列：

$$0 \longrightarrow \Gamma(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}(E)) \longrightarrow \Gamma(E, \omega_E) \longrightarrow H^1(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}) = 0$$

により $\Gamma(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}(E))/\Gamma(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}})$ と等しい．したがって (1) は $\Gamma(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}(E)) = \Gamma(\widetilde{X} \setminus E, \omega_{\widetilde{X}})$ と同値．またこれは $K_{\widetilde{X}} = f^*K_X + \sum_{i=1}^r m_i E_i$ と表したとき $m_i \geq -1$ ($^\forall i = 1, \cdots, r$) と同値である．

(iv) ⇒ (i): (iv) を仮定すると上の議論より $R^{n-1}f_*\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \xrightarrow{\sim} H^{n-1}(E, \mathcal{O}_E)$ は従う．$0 < i < n-1$ としよう．ω を ω_X の自由生成元とすると，$\omega \in \Gamma(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}(E))$ であるから E の外で同型となる準同型 $\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \xrightarrow{\cdot\omega} \omega_{\widetilde{X}}(E)$ を得る．可換図式：

$$\begin{array}{ccccc} H^i_E(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) & \longrightarrow & H^i(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) & \xrightarrow{\alpha} & H^i(\widetilde{X} \setminus E, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \\ \downarrow & & \downarrow \beta & & \delta \downarrow \\ H^i_E(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}(E)) & \longrightarrow & H^i(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}(E)) & \xrightarrow{\gamma} & H^i(\widetilde{X} \setminus E, \omega_{\widetilde{X}}(E)) \end{array}$$

において双対定理と Grauert-Riemenschneider の消滅定理より $H^i_E(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = 0$ $(0 < i < n-1)$．よって α は単射．また δ は同型であるので β は単射になる．そこで可換図式

$$\begin{array}{ccc}
H^i(\widetilde{X}, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) & \xrightarrow{\ \beta\ } & H^i(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}(E)) \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\
H^i(E, \mathcal{O}_E) & \xrightarrow{\ \cdot\omega\ } & H^i(E, \omega_E)
\end{array}$$

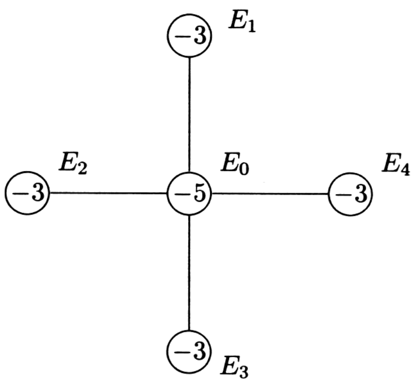
において Grauert-Riemenschneider の消滅定理 $H^i(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}) = 0\ (i > 0)$ を用いれば ψ は同型になる．よって φ の単射が得られる．

これらにより次のことがわかる．

系 7.1.18　対数的標準孤立特異点は Du Bois 特異点である．

［証明］ 対数的標準特異点 (X, x) の標準被覆 $\pi : Y \to X$ をとると X を Y の商と考えることができる．Y は 1-Gorenstein 対数的標準特異点だから 7.1.17 より Du Bois 特異点である．あとは，7.1.16 を適用すれば良い．

例 7.1.19　上記 7.1.18 の逆は必ずしも成立しない．例えば 2 次元の有理特異点はすべて Du Bois 特異点であるが，有理特異点には対数的標準でないものがある．例えば最小特異点解消の重みつきグラフが次のようになるものを考える：



ただし各既約成分は $\mathbb{P}^1$ に同型とする．すると基本サイクル Z_f は被約になり $p(Z_f) = 0$ となるのでこの特異点は有理特異点である．一方 $f : \widetilde{X} \to X$ を最小特異点解消としたとき $K_{\widetilde{X}} = f^*K_X - \frac{13}{11}E_0 - \frac{8}{11}\sum_{i=1}^{4} E_i$ となるので，対数

的標準ではない.

7.2 極小モデル問題

2次元の特異点には常に最小特異点解消が存在した. しかし3次元以上になると, もはや一般には最小特異点解消は存在しない. 次の例がそれを示している.

例 7.2.1 X を $xy - zw = 0$ で定義される $\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$ の閉多様体とすると原点で特異点をもっていることがわかる. $D_1, D_2 \subset X$ をそれぞれ $x = z = 0$, $y = z = 0$ で定義される X の因子とする. イデアル (x,z), (y,z) による blow up をそれぞれ $b_1 : Y_1 \to X$, $b_2 : Y_2 \to X$ とする. すると Y_i は非特異で $\ell_i \subset Y_i$, $\ell_i \cong \mathbb{P}^1$ が存在して $b_i|_{Y_i \setminus \ell_i} : Y_i \setminus \ell_i \xrightarrow{\sim} X \setminus \{0\}$, $i = 1, 2$, よって b_i は共に X の特異点解消. $E_i := b_i^{-1}(D_i)$, $i = 1, 2$ とすると $-E_i$ はカルティエ因子で b_i-豊富 ([EGA II, 8.1.7) なので $-E_i \cdot \ell_i > 0$, 特に $\ell_i \subset E_i$, $i = 1, 2$. 一方 D_i の Y_j $(i \neq j)$ における狭義の逆像を $[D_i]$ と表すと $\ell_j \not\subset [D_i]$ で $\ell_j \cap [D_j] \neq \emptyset$ であることがわかる. 明らかに Y_1 と Y_2 は X 上同型ではない.

ここでもし $(X, 0)$ の最小特異点解消 $f : Y \to X$ が存在したとして $\sigma_i : Y_i \to Y$ を対応する X 上の射とすると σ_i は固有射であるから全射となり $\ell := \sigma_1(\ell_1) = \sigma_2(\ell_2)$ は既約な曲線でなければならない. よって σ_i は有限射となり Zariski の主要定理 ([Ha2, V, 5.2]) より同型となる. よって矛盾.

そこで最小特異点解消のかわりにゆるい特異点を許した極小モデルというものを考えよう.

定義 7.2.2 正規特異点 (X, x) の部分解消 $f : Y \to X$ が**極小モデル** (minimal model) であるとは次の条件がみたされることである：

(1) Y は高々端末特異点しか持たない；

(2) K_Y が f-nef である.

次の命題により2次元の場合は極小モデルが存在することがわかる. それと

ともに極小モデルは最小特異点解消の高次元への一般化であることもわかる．

命題 7.2.3　正規特異点 (X,x) が 2 次元の場合，最小特異点解消が極小モデルになる．

［証明］ $f:Y\to X$ が最小特異点解消ということは，

(1′)　Y が非特異．

(2′)　Y の例外集合が (-1)-曲線を含まない．

ということと同値であった．6.1.18 より (1′) は (1) と同値．また既約な例外曲線 C が (-1)-曲線であるということと $K_Y\cdot C<0$ とは同値であるから (2′) は (2) と同値．

次に少し違うモデルを考えよう．

定義 7.2.4　正規特異点 (X,x) の部分解消 $f:Y\to X$ が**標準モデル** (canonical model) であるとは次の条件がみたされることである：

(1)　Y は高々標準特異点しか持たない；

(2)　K_Y は f-豊富である．

ここで $\mathbb{Q}$-カルティエ因子 D が ***f*-豊富** (f-ample) であるとは x の十分小さな開近傍 $U\subset X$ に対し閉埋め込み $\iota:f^{-1}(U)\hookrightarrow\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}\times U$, $m>0$, 超曲面 $H\subset\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ が存在し，$mD\sim\iota^*(H\times U)$ となっていることである．

命題 7.2.5　標準モデル $f:Y\to X$ が存在すれば X 上の同型を除いて一意的である．

［証明］ $f_i:Y_i\to X$, $(i=1,2)$ を標準モデルとする．K_{Y_i} が f_i-豊富であることより Y_i は X 上 $\mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{i\geq 0} f_{i*}\mathcal{O}(mK_{Y_i})\right)$ $(i=1,2)$ に同型 ([EGA III, 2.3.4(ii)])．ここで X の特異点解消 $f:Y\to X$ を f_i $(i=1,2)$ を経由するようにとる．$f=f_i\circ h_i$, $(i=1,2)$ とすると，Y_i は高々標準特異点しか持たないか

ら $h_{i_*}\mathcal{O}_Y(mK_Y) = \mathcal{O}_{Y_i}(mK_{Y_i})$. よって Y_1, Y_2 は共に $\mathrm{Proj} \bigoplus_{i\geq 0} f_*\mathcal{O}(mK_Y)$ に X 上同型となる.

標準モデル，極小モデルは定義から X_{reg} 上では同型であることがわかる. 次の命題は 2 次元の場合標準モデルが存在することを示している.

命題 7.2.6　2 次元正規特異点 (X, x) の最小特異点解消 $g : \widetilde{X} \to X$ において $g^{-1}(x)$ の **(-2)-曲線** ($C^2 = -2$, $C \cong \mathbb{P}^1$ なる C) をすべてつぶす射 $h : \widetilde{X} \to Y$ をとる. このとき自然な射 $f : Y \to X$ が標準モデルである.

［証明］ 例外集合の部分因子の交点行列はまた負定値であるのでつぶすことができるということに注意しよう. (-2)-曲線からなる部分因子をつぶすと 6.5.1 より有理 2 重点を得る. よって Y 上の特異点は標準特異点. $K_{\widetilde{X}} = h^*K_Y$ より f の任意の既約例外因子 E_i に対し $K_Y \cdot E_i = K_{\widetilde{X}} \cdot E_i'$ (E_i' は E_i の狭義の逆像) であるが，E_i' は (-2)-曲線でないので $K_{\widetilde{X}} \cdot E_i' > 0$. よって K_Y は $E = f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ 上で豊富. したがって $m \gg 0$ に対し $\mathcal{O}_Y(mK_Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_E$ は $\Gamma(E, \mathcal{O}(mK_Y) \otimes \mathcal{O}_E)$ で生成されている. 一方 $m \gg 0$ に対し $(m-1)K_Y - E$ は f-nef であるから，川又-Viehweg の消滅定理 (5.2.16) より $R^1 f_*\mathcal{O}_Y(mK_Y - E) = 0$ となり完全列 $f_*\mathcal{O}_Y(mK_Y) \to \Gamma(E, \mathcal{O}_Y(mK_Y) \otimes \mathcal{O}_E) \to 0$ より次の完全列

(1)
$$f^*f_*\mathcal{O}_Y(mK_Y) \to \Gamma(E, \mathcal{O}_Y(mK_Y) \otimes \mathcal{O}_E) \to 0$$

を得る. したがって，自然な準同型 $f^*f_*\mathcal{O}_Y(mK_Y) \to \mathcal{O}_Y(mK_Y)$ の余核の台は E と共通部分をもたない. したがって X を x の十分小さい近傍にとり直せば全射

$$f^*f_*\mathcal{O}_Y(mK_Y) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{O}_Y(mK_Y)$$

を得る. これより X 上の固有射 $\Phi : Y \to \mathbb{P}^N \times X$ が得られ，$mK_Y = \Phi^*(H \times X)$, ここで H は $\mathbb{P}^N$ の超平面. Φ は $X \setminus \{x\}$ 上では閉埋め込みで，E 上では $mK_Y|_E$ が豊富であることと (1) の完全性より $\Phi|_E$ は閉埋め込みになる. よって Φ は有限射となり，p_2-豊富な因子 $H \times X$ の有限射による引きもどし mK は $f = p_2 \circ \Phi$-

豊富になる．これにより $f : Y \to X$ は標準モデルになる．

注　7.2.5, 7.2.6 の証明で用いた Proj や豊富因子の諸性質についてはこの本では準備できなかった．[Ha2] や [EGA, II,III] を参照して頂きたい．

さて，3 次元以上では極小モデル，標準モデルは存在するのであろうか．この問題を**相対極小モデル問題** (relative minimal model problem) とよぶ．これは**極小モデル問題** (minimal model problem) の相対版とでもいうべきものである．極小モデル問題については本稿の主題から離れるがここに紹介しておこう．

定義 7.2.7　完備代数多様体 Y が極小モデルであるとは，次の性質がみたされることである：

(1)　Y は高々端末特異点しか持たない；

(2)　K_Y は nef である．

7.2.8　(極小モデル問題)　任意の完備多様体 X で，その小平次元 $\kappa(X) \geq 0$ となるものについて X と開集合上で同型になっているような極小モデル Y および標準モデル Z が存在するであろうか．

相対極小モデル問題，極小モデル問題は 3 次元の場合に Reid, Shokurov, Kollár, 川又ら多くの人々の寄与のもと，森によって最終的に肯定的に解決された．

定理 7.2.9　(森 [Mo1])　(i)　任意の 3 次元正規特異点 (X, x) に対し極小モデル，標準モデルが存在する．さらに極小モデルは $\mathbb{Q}$-分解的になる．

(ii)　任意の 3 次元完備代数多様体 X で $\kappa(X) \geq 0$ なるものについて X と開集合上で同型になっているような極小モデルおよび標準モデルが存在する．さらに極小モデルは $\mathbb{Q}$-分解的になる．

4 次元以上の相対極小モデル問題，極小モデル問題は大変に難しい問題でまだ一般的な解答はない．ただ特殊なものについては任意次元で肯定的に解決されている．

定理 7.2.10　(石井 [I11, I12])　(i)　任意の孤立とは限らない正規超曲面特異点 $(X,x) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ について定義方程式が非退化であれば，極小モデル，標準モデルが存在する．

(ii)　完備な任意の $n+1$ 次元トーリック多様体 $T_N(\Delta)$ の Δ-正則な因子 X が $\kappa(X) \geq 0$ をみたせば，X と開集合上で同型になっているような極小モデルが存在する．ここで **Δ-正則** (Δ-regular) な因子 X とは，任意の $\sigma \in \Delta$ に対し $X \cap \mathrm{orb}\,\sigma$ が空集合かまたは $\mathrm{orb}\,\sigma$ の非特異因子になっていることである．

さて標準モデル (または極小モデル) $f: Y \to X$ において K_Y と f^*K_X の比較をしよう．ここで f^*K_X が定義されるのは X が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点をもつ場合である．このときに 2 次元の命題 6.1.17 と同様のことが成立する．まず例外因子上に台をもつ因子について準備をしよう．

補題 7.2.11　正規特異点 (X,x) の射影的部分解消 $f: Y \to X$ に対し，因子 Δ が f の例外因子上に台をもち，f-nef な $\mathbb{Q}$-カルティエ因子であるとき，$-\Delta$ は f の例外集合全体に台をもつ有効因子または $\Delta = 0$. 特に Δ が f-豊富の場合，$\Delta = 0$ ならば f は同型である．

[証明]　f の例外因子を $E_1, \cdots, E_r$ とする．f は射影的であるから 3.3.7 より f はあるイデアル $I \subset \mathcal{O}_X$ による blow up. よって Y 上に有効なカルティエ因子 L が存在して $I\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-L)$ となり，これは f-豊富可逆層である ([EGA, II, 8.1.7]). Δ は f-nef であるから任意の $a \geq 0$ に対し，$\Delta - aL$ は f-nef になることに注意する．$\Delta = \sum_{i=1}^r a_i E_i$, $L = \sum_{i=1}^t m_i E_i$ $(t \geq r,\ m_i > 0)$ とおく．ここで $E_{r+1}, \cdots, E_t$ は例外因子でない成分．$a_i \geq 0$ なる i が存在したとすると $a := \max_{1 \leq i \leq r}\{a_i/m_i\} \geq 0$ となり，

$$\Delta - aL = -\sum_{i=r+1}^{t} am_i E_i + \sum_{i=1}^{r}(a_i - am_i)E_i,$$

ここで $-am_i \leq 0\ (i = r+1, \cdots, t)$, $a_i - am_i \leq 0\ (i = 1, \cdots, r)$. いま，すべての $i = 1, \ldots, r$ について $a = a_i/m_i$ とする．$-\sum_{i=r+1}^t am_i E_i < 0$ ならば $f(C) =$

x なる $\bigcup_{i=1}^r E_i$ 上の曲線 C が存在して $(\Delta - aL)\cdot C = -\sum am_iE_i \cdot C < 0$ となって矛盾するので $\sum_{i=r+1}^t am_iE_i = 0$ でなければならない．$a \neq 0$ とすると $\sum_{i=r+1}^t m_iE_i = 0$ より $\Delta = aL$ となり Δ が f-nef であることに矛盾する．よって，$a = 0$ となり $a = a_i/m_i$ $(i = 1, \cdots, r)$ より $a_i = 0$ を得る．ある $1 \leq j \leq r$ について $a > a_j/m_j$ となっているとする．このような j と，$a = a_i/m_i$ なる i について $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ なるものをとり，曲線 $C \subset E_i$ で $C \cap E_j \neq \emptyset, C \not\subset E_j$ なるものをとると，$(\Delta - aL)\cdot C < 0$ となって矛盾．したがって $a_i \geq 0$ なる i が存在するならば，任意の i について $a_i = 0$.

次の定理が 6.1.17 の一般化である．

定理 7.2.12　(X, x) を $\mathbb{Q}$-Gorenstein 正規特異点，

(i)　$f: Y \to X$ を標準モデル，$E_1, \cdots, E_r$ を f の例外因子とすると，

$$K_Y = f^*K_X + \sum_{i=1}^r m_iE_i, \quad m_i < 0\ ({}^\forall i)$$

(ii)　$f: Y \to X$ を射影的な極小モデル，$E_1, \cdots, E_r$ を f の例外因子とすると

$$K_Y = f^*K_X + \sum_{i=1}^r m_iE_i,$$

ここで $m_i < 0\ ({}^\forall i)$ かまたは $m_i = 0\ ({}^\forall i)$.

［証明］　$\Delta = \sum_{i=1}^r m_iE_i$ に 7.2.11 を適用すれば良い．

7.3　高次元の標準特異点，端末特異点

この節では特異点の孤立性は仮定しないで，標準特異点端末特異点のもっている様々の性質をみよう．特異点集合の様子，超曲面で切ったときにどうなるかを見る．特に 3 次元端末特異点はどのようなものになるかをはっきりさせよう．

命題 7.3.1　X を擬射影的多様体とする．このとき一般の超平面による X の切断 H について次が成立する．

(i)　X が Cohen-Macaulay 多様体で正規のとき，H も Cohen-Macaulay 多様体で正規である．

(ii)　X が高々標準特異点 (または端末特異点) しか持たないとき H も高々標準特異点 (または端末特異点) しか持たない．

［証明］ (i)　X が Cohen-Macaulay 多様体のとき 4.3.12 より H も Cohen-Macaulay 多様体になる．X は正規であるから $\operatorname{codim}_X X_{\text{sing}} \geq 2$ で H は一般であるので X_{sing} の各既約成分を含まないとして良い．したがって $\operatorname{codim}_H H \cap X_{\text{sing}} \geq 2$. また Bertini の定理 ([S, p.24]) より H は $H \cap X_{\text{sing}}$ の外で非特異として良い．したがって Serre の判定法 (2.5.16) により X は正規である．

(ii)　(i) より H が正規になることはよい．$f : \widetilde{X} \to X$ を X の良特異点解消，E_i $(i = 1, \cdots, r)$ を f の既約例外因子とする．H は一般であるから任意の i について $f(E_i) \not\subset H$ として良い．したがって，H の狭義の逆像 $\widetilde{H}$ は $f^*(H)$ と一致し，Bertini の定理より非特異になる．$K_{\widetilde{X}} = f^*K_X + \sum_{i=1}^r m_i E_i$ とすると，

$$
\begin{aligned}
K_{\widetilde{H}} &= K_{\widetilde{X}} + \widetilde{H}\,|_{\widetilde{H}} = \left(f^*(K_X + H) + \sum m_i E_i\right)|_{\widetilde{H}} \\
&= f'^*(K_H) + \sum_{i=1}^r m_i (E_i\,|_{\widetilde{H}}).
\end{aligned}
$$

ただし $f' = f\,|_{\widetilde{H}}$. よって $K_{\widetilde{X}}$ における E_i の係数 $m_i \geq 0$ (または $m_i > 0$) ならば $K_{\widetilde{H}}$ における $E_i\,|_{\widetilde{H}}$ の係数も非負 (または正).

系 7.3.2　擬射影的多様体 X について次が成立する：

(i)　高々標準特異点しか持たないとき，余次元 3 の閉集合の外では X は高々 Gorenstein 特異点しか持たない；

(ii)　高々端末特異点しか持たないとき $\operatorname{codim} X_{\text{sing}} \geq 3$. 特に 3 次元端末特異点は孤立特異点である．

［証明］(i)　Gorenstein でない特異点の集合を $Z \subset X$ とすると Z は閉集合になることが知られている．X の一般の超曲面切断を H_1, H_1 の一般の超曲面切断を $H_2, \cdots$ とすると，順に $X \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_{n-2}$ $(n = \dim X)$ が得られる．7.3.1 により H_{n-2} は，2 次元で高々標準特異点しか持たないから Gorenstein 特異点である．よって $H_{n-2} \cap Z = \emptyset$ より $\mathrm{codim} Z \geq 3$.

(ii)　Z として特異点の集合をとって (i) と同じ議論をすれば良い．

7.3.3　(X, x) を標準特異点 (または端末特異点) とし $\rho : \overline{X} \to X$ を標準被覆とする．5.2.3, 5.2.9,(i) により，$\overline{X}$ は 1-Gorenstein 標準特異点 (または端末特異点) のみをもつ．これによりいくつかの議論が 1-Gorenstein の場合に帰着されるので，この場合に詳しく調べてみよう．1-Gorenstein 標準特異点は Gorenstein 有理特異点と同値であった (5.2.15) ことに注意しよう．

命題 7.3.4　(i)　(X, x) を Gorenstein 有理特異点とする．点 x を通る X の一般の超平面切断 (H, x) は Gorenstein 特異点であって，有理特異点または $\mathfrak{m}_{H,x}\omega_H = f_*\omega_{\widetilde{H}}$. ただし $f : \widetilde{H} \to H$ は特異点解消．特に $\dim(X, x) = 3$ のとき (H, x) は Du Val 特異点または最小楕円型特異点である．

(ii)　正規特異点 (X, x) に対してある超平面切断 (H, x) で Gorenstein 有理特異点になるものがあるとき (X, x) も Gorenstein 有理特異点である．

［証明］一般に (X, x) が Gorenstein 特異点であることと (H, x) が Gorenstein 特異点であることは同値である (4.3.12).

(i)　$\sigma : Y_1 \to X$ を極大イデアル $\mathfrak{m}_{X,x}$ による blow up, $\varphi : Y \to Y_1$ を Y_1 の特異点解消，$f := \sigma \circ \varphi$ とする．f は σ を経由しているので $\mathfrak{m}_{X,x}\mathcal{O}_Y$ は可逆層 $\mathcal{O}_Y\left(-\sum_{i=1}^r s_i E_i\right)$ $(s_i > 0$, E_i は $f(E_i) = \{x\}$ となる例外因子) となる．H は一般であるので Y における H の狭義の逆像を $\widetilde{H}$ とすると $f^*H = \widetilde{H} + \sum_{i=1}^r s_i E_i$ と表される．また σ を経由しているので H を x を通る一般超平面の中で動かしたとき $\widetilde{H}$ は $f^{-1}(x)$ 上に基点をもたない．よって Bertini の定理より $\widetilde{H}$ は $f^{-1}(x)$ 上に特異点をもたない．これで $f' := f|_{\widetilde{H}} : \widetilde{H} \to H$ は (H, x) の特異点解消とみなせる．(X, x) が Gorenstein 標準特異点であるなら，

$$K_Y = f^*K_X + \sum_{i=1}^{r} m_i E_i + \sum_{j=1}^{t} n_j F_j, \quad (m_i \geq 0,\ n_j \geq 0)$$

$$K_Y + \widetilde{H} = f^*(K_X + H) + \sum_{i=1}^{r} (m_i - s_i) E_i + \sum n_j F_j$$

よって

$$K_{\widetilde{H}} = f'^*(K_H) + \sum_{i=1}^{r} (m_i - s_i) E'_i + \sum n_j F'_j,$$

ただし $\{F_j\}$ は $\{E_i\}$ 以外の例外因子で $E'_i = E_i|_{\widetilde{H}}$, $F'_j = F_j|_{\widetilde{H}}$ とする．よって任意の $\theta \in \omega_H$ に対し $\nu_{E'_i}(\theta) \geq m_i - s_i$, $\nu_{F'_j}(\theta) \geq n_j \geq 0$.

任意の $h \in \mathfrak{m}_{H,x}$ は $\mathfrak{m}_{X,x}$ から来ているので，$\nu_{E'_i}(h) \geq s_i$ より $\nu_{E'_i}(h\theta) \geq m_i \geq 0$, $\nu_{F'_j}(h\theta) \geq n_j \geq 0$ となり，$h\theta \in f'_*\omega_{\widetilde{H}}$. これで $\mathfrak{m}_{H,x}\omega_H \subset f'_*\omega_{\widetilde{H}}$ が得られたが $f'_*\omega_{\widetilde{H}} \subset \omega_H$ は明らか．$\dim_{\mathbb{C}} \omega_H/\mathfrak{m}_{H,x}\omega_H = 1$ であるから，$f'_*\omega_{\widetilde{H}} = \mathfrak{m}_{H,x}\omega_H$ か，または $f'_*\omega_{\widetilde{H}} = \omega_H$ であるが，後者は (H,x) が有理特異点であることを示している (5.2.14). 特に $\dim(X,x) = 3$ のとき (H,x) は 2 次元正規特異点であるから孤立であり 7.1.17 の証明でみたように $\omega_H/f'_*\omega_{\widetilde{H}}$ と $R^1 f'_*\mathcal{O}_{\widetilde{H}}$ は双対なので $\dim R^1 f'_*\mathcal{O}_{\widetilde{H}} = \dim \omega_H/f'_*\omega_{\widetilde{H}} = 0$ または 1. したがって (H,x) は Du Val 特異点か，または最小楕円型特異点である．

(ii) 次なる補題 7.3.5 により，平坦射 $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ で $X_0 := \pi^{-1}(0) \simeq H \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, $X_t := \pi^{-1}(t) \simeq X$ $(t \neq 0)$ なるものが存在する．Elkik の定理 (8.1.12 参照) により X_0 が高々有理特異点しか持たなければ X_t も高々有理特異点しか持たないことがわかる．

補題 7.3.5 X をアフィン多様体 H をその超平面とする．このとき平坦射 $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ で $\mathcal{X}_0 := \pi^{-1}(0) \cong H \times \mathbb{A}^1$, $\mathcal{X}_t := \pi^{-1}(t) \cong X$ $(t \neq 0)$ なるものが存在する．

[証明] $X \subset \mathbb{A}^N_{\mathbb{C}}$ のイデアルを $I \subset \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_N]$ とし，H は $X_N = 0$ で定義されているとする．環準同型 $\varphi : \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_N] \to \mathbb{C}[Y_1, \cdots, Y_{N+1}]$ を $X_i \mapsto Y_i$ $(i \leq N-1)$ $X_N \mapsto Y_N Y_{N+1}$ で定義する．このとき $\varphi(I)$ で生

成されるイデアル $J \subset \mathbb{C}[Y_1, \cdots, Y_{N+1}]$ で定義される多様体 $\mathcal{X} \subset \mathbb{A}^{N+1}$ を考えると $\pi : \mathcal{X} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, $(y_1, \cdots, y_{N+1}) \to y_{N+1}$ は求める性質をもつ．実際 $\mathcal{X}_0 \subset \mathbb{A}^N_{\mathbb{C}}$ は $\varphi_0 : \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_N] \to \mathbb{C}[Y_1, \cdots, Y_N]$, $X_i \mapsto Y_i$ $(i \leq N-1)$, $X_N \mapsto 0$ による I の像で定義されるので $H \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ と同型．$\mathcal{X}_t \subset \mathbb{A}^N_{\mathbb{C}}$ $(t \neq 0)$ は $\varphi_t : \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_N] \to \mathbb{C}[Y_1, \cdots, Y_N]$, $X_i \mapsto Y_i$ $(i \leq N-1)$ $X_N \mapsto tY_N$ による I の像で定義されるので X に同型．

次に3次元端末特異点で重要な役割りをはたす特異点を定義しよう．

定義 7.3.6　3次元正規特異点 (X, x) が **cDV 特異点** (compound Du Val singularity) であるとは，ある超平面切断 (H, x) が Du Val 特異点になることである．

定理 7.3.7　3次元 1-Gorenstein 特異点 (X, x) について次は同値である．

(i)　(X, x) は端末特異点である．

(ii)　(X, x) は孤立 cDV 特異点である．

［証明］ (i) ⇒ (ii)　7.3.2 より (X, x) は孤立特異点である．(H, x) を一般の超平面切断，H の方程式を $h = 0$ とする．$f : Y \to X$ を X の特異点の解消で 7.3.4 の証明のように $\mathfrak{m}_{X,x}$ の blow up を経由しているとする．$\widetilde{H}$ を H の Y における狭義の逆像とすると $f' := f|_{\widetilde{H}} : \widetilde{H} \to H$ が H の特異点解消になっている．$f^{-1}(x)_{\mathrm{red}} = \sum_{i=1}^r E_i$ とすると

$$K_Y = f^* K_X + \sum_{i=1}^r m_i E_i, \quad m_i > 0 \ (^\forall i).$$

一方　$\widetilde{H} = f^* H - \sum_{i=1}^r \nu_{E_i}(h) E_i$　より添加公式から，

(1)
$$K_{\widetilde{H}} = f'^* K_H + \sum \left(m_i - \nu_{E_i}(h)\right) E_i|_{\widetilde{H}}.$$

ここで (H, x) が最小楕円型であるとすると，[Re1, 2.9] より $\{E_i' := E_i|_{\widetilde{H}}\}$ の中に，標準モデルに表れる E_i' があって，一般の $\overline{h} \in \mathfrak{m}_{H,x}$ に対して $\nu_{E_i'}(\overline{h})$ が基本サイクル Z_f における E_i' の係数となっている．6.6.6 よりこれはまた

$-K_{\widetilde{H}}$ における E_i' の係数となっているので (1) より $m_i - \nu_{E_i}(h) = -\nu_{E_i'}(\overline{h})$. $h \in \mathfrak{m}_{X,x}$, $\overline{h} \in m_{H,x}$ は一般にとったもので E_i と $\widetilde{H}$ は横断的に交わっているので，$\nu_{E_i}(h) = \nu_{E_i'}(\overline{h})$. したがって $m_i = 0$ となり (X,x) が端末特異点であることに反する．

(ii) ⇒ (i) $f: Y \to X$, $\widetilde{H}$, $\{E_i\}$ を上のようにとる．完全列：

$$0 \longrightarrow \omega_Y \longrightarrow \omega_Y(\widetilde{H}) \longrightarrow \omega_{\widetilde{H}} \longrightarrow 0$$

に，Grauert-Riemenschneider の消滅定理を使えば，次の図式が得られる：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & f_*\omega_Y & \longrightarrow & f_*\omega_Y(\widetilde{H}) & \longrightarrow & f_*\omega_{\widetilde{H}} & \longrightarrow & R^1 f_*\omega_Y = 0 \\ & & \alpha \big\downarrow & & \beta \big\downarrow & & \gamma \big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \omega_X & \longrightarrow & \omega_X(H) & \longrightarrow & \omega_H & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

仮定より (H,x) は有理特異点．7.3.4 より (X,x) も有理特異点であるから，α, γ は等号．よって β も等号になる．これは任意の $\theta \in \omega_X$ に対して $\frac{\theta}{h} \in \omega_X(H)$ が $f_*\omega_Y(\widetilde{H})$ の元であることを主張しているので，任意の E_i に対して $\nu_{E_i}\left(\frac{\theta}{h}\right) \geq 0$. したがって $\nu_{E_i}(\theta) \geq \nu_{E_i}(h) > 0$ より (X,x) は端末特異点になる．

7.3.3, 7.3.7 で見たように，3 次元端末特異点は cDV 特異点という超曲面特異点を巡回群で割って得られた特異点であった．これから，超曲面特異点の巡回群による商特異点を考察しよう．また非特異点というのは cDV 特異点の特殊なものとも考えられるので同時に巡回商特異点も考える．最初に群による商に関する一般的な補題を 2 つ準備する．

補題 7.3.8 $(Y,0) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ を n 次元超曲面特異点，G を Y に作用する有限群として (X,x) が $(Y,0)$ の G による商とする．このとき $GL(n+1,\mathbb{C})$ の小型の有限部分群 G' が存在して Y に作用し，$(Y,0)/G' \simeq (X,x)$ が成立する．

［証明］ $0 \in Y$ の安定化群 $G_0 := \{g \in G \mid g0 = 0\}$ が G と一致しない場合 0 の近傍 V を適当にとれば $X = V/G_0$ となっているので，$G_0 = G$ として良い．0 は G の作用で固定されているので 0 の極大イデアル $\mathfrak{m}$ を不変にする．

したがって任意の元 $g \in G$ はベクトル空間の同型 $g_1 : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ を引き起こす．$\mathbb{C}^{n+1}$ の座標を $x_0, \cdots, x_n$ とすると g_1 は $x_0, \cdots, x_n$ で生成されるベクトル空間の自己同型を与える．$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^{n+1},0} \cong \mathbb{C}[[x_0, \cdots, x_n]]$ であるから，同型 $g^* : \widehat{\mathcal{O}}_{Y,0} \to \widehat{\mathcal{O}}_{Y,0}$ は環準同型 $g_\infty : \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^{n+1},0} \to \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{C}^{n+1},0}$ にまで拡張されるが g_1 が同型であることより g_∞ は同型となる．これと 6.4.5 により $(Y, 0)$ 上の作用は $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ 上の線型作用に拡張されたが 6.4.8 より G を小型線型群として良い．

補題 7.3.9　$G \subset GL(n+1, \mathbb{C})$ を位数 r の小型巡回群とし，G の生成元を $g = \begin{pmatrix} \varepsilon^{a_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon^{a_n} \end{pmatrix}$ (ε は 1 の原始 r 乗根，$0 \le a_i \le r-1$) と表す．$\overline{M} := \mathbb{Z}^{n+1}$, $\overline{N} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overline{M}, \mathbb{Z})$, $N := \overline{N} + \frac{1}{r}(a_0, \cdots, a_n)\mathbb{Z}$ とする．$N_{\mathbb{R}} = \overline{N}_{\mathbb{R}}$ の第一象限 σ からなる扇を Δ とする．このとき $\mathbb{C}^{n+1}/G \cong T_N(\Delta)$.

［証明］ $M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ とすると，自然な包含関係 $M \subset \overline{M}$ がある．$\mathbb{C}^{n+1}/G$ のアフィン環は $\mathbb{C}[x_0, \cdots, x_n]^G = \mathbb{C}[\overline{M} \cap \sigma^\vee]^G$ であった．ここで $x^{\mathbf{m}} = x_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{m_n}$ が G で不変ということは，$g^*(x^{\mathbf{m}}) = \varepsilon^{\Sigma a_i m_i} x^{\mathbf{m}}$ より $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = \sum a_i m_i \equiv 0 \pmod{r}$ と同値．一方 $\mathbf{m} \in \overline{M}$ が M の元であるということは N の元をすべて $\mathbb{Z}$ にうつす，すなわち $(\frac{1}{r}(a_0, \cdots, a_n), \mathbf{m}) \in \mathbb{Z}$ ということでありこれは $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \equiv 0 \pmod{r}$ と同値．したがって $\mathbb{C}[\overline{M} \cap \sigma^\vee]^G = \mathbb{C}[M \cap \sigma^\vee]$ これは $T_N(\Delta)$ のアフィン環と一致する．

ここで関数の重みを定義しよう．

定義 7.3.10　$M = \mathbb{Z}^{n+1}$, $N = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$, σ を $N_{\mathbb{R}}$ の中の有理強凸多面錐とする．$\mathbf{a} \in \sigma$, $f \in \mathbb{C}[M \cap \sigma^\vee]$ に対し

$$\mathbf{a}(f) := \min\{(\mathbf{a}, \mathbf{m}) \mid x^{\mathbf{m}} \in f\}$$

ただし $x^{\mathbf{m}} \in f$ は f に単項式 $x^{\mathbf{m}}$ が 0 でない係数をもって現れることを意味する．

$\mathbf{a} \in N$ が**原始的** (primitive) であるとは，$\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}$ 上，0 と $\mathbf{a}$ の間に N の元が存在しないことをいう．

超曲面特異点の性質を weighted blow up (3.4.20) を用いて調べてみよう．

命題 7.3.11 $(Y,0) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ を $f=0$ で定義される正規超曲面特異点，$g = \begin{pmatrix} \varepsilon^{a_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon^{a_n} \end{pmatrix}$ (ε は 1 の原始 r 乗根，$0 \leq a_i \leq r-1$) で生成される小型の巡回群 G が $(Y,0)$ に作用しているとする．$(X,x) := (Y,0)/G$ とし，7.3.9 の記号を用いる．任意の原始的な $\mathbf{a} \in N \cap \sigma$ に対して $\Delta(\mathbf{a})$ を Δ の $\mathbf{a}$ による星状細分とする．$T_N(\Delta(\mathbf{a})) \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{a}}} T_N(\Delta) = \mathbb{C}^{n+1}/G$ による $X \subset \mathbb{C}^{n+1}/G$ の狭義の逆像を $X_{\mathbf{a}}$, $\varphi_{\mathbf{a}}$ の例外因子を Γ とすると次が成立する：

(i) $X_{\mathbf{a}} = \varphi_{\mathbf{a}}^* X - \mathbf{a}(f)\Gamma$, $K_{T_N(\Delta(\mathbf{a}))} = \varphi_{\mathbf{a}}^* K_{T_N(\Delta)} + (\mathbf{a}(x_0 \cdots x_n) - 1)\Gamma$;

(ii) $a := \mathbf{a}(x_0 \cdots x_n) - \mathbf{a}(f) - 1 \leq 0$ (または < 0) とすると $X_{\mathbf{a}}$ の特異点解消 $\psi : \widetilde{X} \to X_{\mathbf{a}}$ が存在して，

$$K_{\widetilde{X}} = (\varphi_{\mathbf{a}} \circ \psi)^* K_X + \sum m_i E_i$$

と表したとき $\Gamma \cap X_{\mathbf{a}}$ の成分に対応している E_i については $m_i \leq 0$ (または < 0), よって特に (X,x) は端末特異点ではない (または標準特異点ではない).

[証明] (i) rX は $f^r \in M \cap \sigma$ で定義されるカルティエ因子であるので，$\varphi_{\mathbf{a}}^*(rX) = rX_{\mathbf{a}} + \nu_\Gamma(f^r)\Gamma$, したがって，任意の $g \in M \cap \sigma$ に対して $\nu_\Gamma(g) = \mathbf{a}(g)$ を示せば (i) の第一の等式が得られる．$\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}$ とすれば $\Gamma \cap U_\tau = \operatorname{orb}\tau$ となっており，$\Gamma \cap U_\tau \subset U_\tau$ は $(\mathbb{C}^*)^n \times \{0\} \subset (\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}$ と同型であるから $\Gamma \cap U_\tau$ は U_τ 上 1 つの方程式 $\zeta = 0$ で定義されている．$g = \zeta^m h$ $h \notin (\zeta)$ とした時 $\mathbf{a}(g) = m$ となっていることを示せば良い．$\mathbf{a}(g) = m\mathbf{a}(\zeta) + \mathbf{a}(h)$ であるが，[Od1, 5.3, Remark] より (ζ) は $\{\eta \in \mathbb{C}[\tau^\vee \cap M] \mid \mathbf{a}(\eta) > 0\}$ で生成されるイデアルなので $\mathbf{a}(h) = 0$. また ζ はこのイデアルの生成元であり，$\mathbf{a}$ が原始的なので $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1$ なる $\mathbf{b} \in M$ が存在する (実際 $\Delta(\mathbf{a})$ はユニモジュラーな細分をもつので $\mathbf{a}$ を第一行として持つようなユニモジュラー

な行列がある．それの逆行列の第一列を ${}^t\mathbf{b}$ とすれば良い) ので $\mathbf{a}(\zeta) = 1$ でなければならない．これより $\mathbf{a}(g) = m$. (i) の第二の等式については，任意のトーリック多様体 $T_N(\Sigma)$ に対して $-K_{T_N(\Sigma)} = \sum_{\eta\in\Sigma(1)} \overline{\mathrm{orb}\,\eta}$, ただし $\Sigma(1)$ は扇 Σ の 1 次元の錐全体の集合 ([Od1, 6.6]). したがって $T_{\overline{N}}(\Delta) = \mathbb{C}^{n+1}$ においては $-K_{T_{\overline{N}}(\Delta)} = \sum_{i=0}^n \overline{\mathrm{orb}\,\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_i} = \{x_0 \cdot \ \cdots \ \cdot x_n = 0\}$, ここで $\mathbf{e}_0, \cdots, \mathbf{e}_n$ は単位ベクトル．一方 $\pi : T_{\overline{N}}(\Delta) \to T_N(\Delta)$ は G が小型だから分岐因子をもたないので，$rK_{T_{\overline{N}}(\Delta)} = \pi^*(rK_{T_N(\Delta)})$. よって $-rK_{T_N(\Delta)}$ は $x_0^r \cdot \cdots \cdot x_n^r$ で定義されるカルティエ因子．したがって上の議論の f を $x_0 \cdot \cdots \cdot x_n$ に適用すれば $\varphi_{\mathbf{a}}^*(-K_{T_N(\Delta)}) = \sum_{i=0}^n \overline{\mathrm{orb}\,\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_i} + \mathbf{a}(x_0 \cdot \ \cdots \ \cdot x_n)\Gamma$. また $-K_{T_N(\Delta(\mathbf{a}))} = \sum_{i=0}^n \overline{\mathrm{orb}\,\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_i} + \Gamma$ であるから

$$K_{T_N(\Delta(\mathbf{a}))} = \varphi_{\mathbf{a}}^*(K_{T_N(\Delta)}) + (\mathbf{a}(x_0 \cdot \ \cdots \ \cdot x_n) - 1)\Gamma$$

(ii) (i) の 2 つの等式より

$$K_{T_N(\Delta(\mathbf{a}))} + X_{\mathbf{a}} = \varphi_{\mathbf{a}}^*(K_{T_N(\Delta)} + X) + a\Gamma$$

を得る．

まず $\Gamma \cap X_{\mathbf{a}}$ のある点で $X_{\mathbf{a}}$ が正規であるとき，$\Gamma \cap X_{\mathbf{a}}$ の開集合に沿って $X_{\mathbf{a}}$ は非特異であるから $X_{\mathbf{a}}$ の特異点解消 $\psi : Y \to X_{\mathbf{a}}$ をとれば $\Gamma \cap X_{\mathbf{a}}$ の一般の点の近傍で ψ は同型で，そこにおいて $K_Y = (\varphi_{\mathbf{a}} \circ \psi)^*(K_X) + a\Gamma_X$, $a \leq 0$ (または $a < 0$) となっている．次に $\Gamma \cap X_{\mathbf{a}}$ に沿って $X_{\mathbf{a}}$ が正規でないとしよう．$T_N(\Delta(a))$ は余次元 3 の閉集合を除いた各点の近傍で $S \times \mathbb{C}^{n-1}$ (S は巡回商特異点をもつ曲面) と同型になっている．よって，$\Gamma \cap X_{\mathbf{a}}$ の一般の点の近傍において $T_N(\Delta(\mathbf{a}))$ の特異点解消 $\alpha : Z \to T_N(\Delta(\mathbf{a}))$ で $K_Z = \alpha^* K_{T_N(\Delta(\mathbf{a}))} - D$, $D \geq 0$ なるものがとれる (6.1.17). $X' \subset Z$ を $X_{\mathbf{a}}$ の狭義の逆像とすると，$X' = \alpha^* X_{\mathbf{a}} - D'$, $D' \geq 0$. X' は非特異多様体 Z の因子であるから Gorenstein 多様体となり，添加公式より

$$\begin{aligned} K_{X'} &= K_Z + X'|_{X'} = \alpha^*(K_{T_N(\Delta(\mathbf{a}))} + X_{\mathbf{a}}) - (D + D')|_{X'} \\ &= \alpha^* \cdot \varphi_{\mathbf{a}}^* K_X + a\alpha^*\Gamma - (D + D')|_{X'}, \end{aligned}$$

X' の正規化を $\pi : \overline{X} \to X'$ とすると，$K_{\overline{X}} < \pi^* K_{X'}$. $\overline{X}$ の余次元 2 の閉集合

を除いて $h = \varphi_{\mathbf{a}} \circ \alpha \circ \pi$ は X の特異点解消になっているから，そこにおいて

$$K_{\overline{X}} = h^* K_X + \sum m_i E_i$$

とおくと $\alpha^*\Gamma \cap X'$ の成分に対応している因子 E_i に対し $a \leq 0$ のとき $m_i \leq 0$, $a < 0$ のとき $m_i < 0$.

これにより端末特異点，標準特異点であるための必要条件が得られる．

定理 7.3.12 (X, x), $(Y, 0)$, f, G を 7.3.11 と同様とする．(X, x) が端末特異点 (または標準特異点) ならば任意の原始的な $\mathbf{a} \in N \cap \sigma$ に対して

$$\mathbf{a}(x_0 \cdot \cdots \cdot x_n) > \mathbf{a}(f) + 1$$
$$(\text{または } \mathbf{a}(x_0 \cdot \cdots \cdot x_n) \geq \mathbf{a}(f) + 1)$$

が成立する．

［証明］ 命題 7.3.11,(ii) より明らかである．

定義 7.3.13 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ を $g = \begin{pmatrix} \varepsilon^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon^{a_n} \end{pmatrix}$ で生成される小型の巡回群とする．ただし ε は 1 の原始 r 乗根 $0 \leq a_i \leq r-1$ $(i = 1, \cdots, n)$ とする．このとき商特異点 $(X, x) = (\mathbb{C}^n, 0)/G$ を $\frac{1}{r}(a_1, \cdots, a_n)$ 型とよぶ．

巡回商特異点が端末特異点又は標準特異点であるための必要十分条件が次で得られる．

定理 7.3.14 $\frac{1}{r}(a_1, \cdots, a_n)$ 型の商特異点 (X, x) が，端末特異点 (または標準特異点) であることと，

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n} \overline{ka_i} > 1 \quad (\text{または } \geq 1) \quad (k = 1, 2, \cdots, r-1)$$

が成立することが同値である．ここで $\overline{\alpha}$ は $0 \leq \overline{\alpha} < r$ をみたし $\alpha \equiv \overline{\alpha}$ (mod. r)

なる数とする．

［証明］ 7.3.9, 7.3.11 の記号を用いよう．7.3.11 の (i) の第2式より，端末特異点（または標準特異点）なら任意の原始的な $\mathbf{a} \in \sigma^\vee \cap M$ に対して $\mathbf{a}(x_1 \cdot \cdots \cdot x_n) > 1$（または ≥ 1）．よって特に $\mathbf{a} = \frac{1}{r}(\overline{ka_1}, \cdots, \overline{ka_n})$ としてとれば，求める不等式を得る．逆を説明しよう．(N, Σ) を (N, Δ) のユニモジュラーな細分，$\varphi : T_N(\Sigma) \to T_N(\Delta) = X$ を対応する射とする．7.3.11 の証明と同様にして

$$K_{T_N(\Sigma)} = \varphi^* K_{T_N(\Delta)} + \sum_{\mathbf{p} \in \Sigma[1] \setminus \Delta[1]} (\mathbf{p}(x_1 \cdot \cdots \cdot x_n) - 1)\overline{\mathrm{orb}\, \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{p}}$$

ここで $\Sigma[1], \Delta[1]$ はそれぞれ $\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{p} \in \Sigma(1)$, または $\Delta(1)$ となるような原始的な $\mathbf{p} \in N$ の集合．したがって $\mathbf{p}(x_1 \cdot \cdots \cdot x_n) > 1$（または ≥ 1）, $^\forall \mathbf{p} \in \Sigma[1] \setminus \Delta[1]$ ならば (X, x) は端末特異点（または標準特異点）であることがわかる．ここで $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ として $p_i \geq 1$ なるものがある場合 $\mathbf{p} \in \sigma \cap N$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$（単位ベクトル）より $\mathbf{p}(x_1 \cdot \cdots \cdot x_n) > 1$ は必然的に成立．任意の i について $p_i < 1$ と仮定するとこのような $\mathbf{p}$ は N の元だから $\frac{1}{r}(\overline{ka_1}, \overline{ka_2}, \cdots, \overline{ka_n})$ なる形をしている．仮定よりこのような $\mathbf{p}$ についても $\mathbf{p}(x_1 \cdot \cdots \cdot x_n) > 1$（または ≥ 1）．よって $X = T_N(\Delta)$ は端末（または標準）特異点をもつ．

さて，これから3次元端末特異点を決定しよう．7.3.3, 7.3.7 でみたように3次元端末特異点は非特異点かまたは孤立 cDV 特異点の巡回群による商であった．まず非特異点の商になっている場合を考える．

補題 7.3.15　(X, x) が $\frac{1}{r}(a, b, c)$ 型の巡回商特異点であるとき，$d = a + b + c$ と書くと，(X, x) が端末特異点であることと

$$\overline{ak} + \overline{bk} + \overline{ck} = \overline{dk} + r, \quad \overline{dk} > 0, \quad k = 1, \cdots, r-1$$

が成立することは同値である．

［証明］ まず，これら等式，不等式が成立しているとすると $\frac{1}{r}(\overline{ak} + \overline{bk} + \overline{ck}) > 1$, $k = 1, \cdots, r-1$ となり 7.3.14 より (X, x) は端末特異点．逆に (X, x) が端末

特異点であるとしよう．$r < \overline{ak} + \overline{bk} + \overline{ck} \leq 3r - 3$ であるから，

$$\overline{ak} + \overline{bk} + \overline{ck} = \overline{dk} + r, \quad \text{または}$$
$$\overline{ak} + \overline{bk} + \overline{ck} = \overline{dk} + 2r.$$

しかし後者は起こらない．実際これが成立したとすると $k' := \overline{k(r-1)}$ として，$\overline{ak'} + \overline{bk'} + \overline{ck'} = \overline{ak(r-1)} + \overline{bk(r-1)} + \overline{ck(r-1)} = (\overline{-ak}) + (\overline{-bk}) + (\overline{-ck}) = (r - \overline{ak}) + (r - \overline{bk}) + (r - \overline{ck}) = 3r - (\overline{ak} + \overline{bk} + \overline{ck}) \leq r$ となり矛盾．$r < \overline{ak} + \overline{bk} + \overline{ck}$ より $\overline{dk} > 0$ も明らか．

次の補題の証明は技術的であるので省略しよう．詳細は [Re2. Appendix to §5] を見られたい．

補題 7.3.16 （端末補題） n, m を $n \equiv m \pmod{2}$ なる正整数とする．$\frac{1}{r}(a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, \cdots, b_m)$ を分母 r をもつ有理数 $n+m$ 個の組で各 a_i, b_j が r と互いに素とする．このとき次は同値：

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i k} = \sum_{j=1}^{m} \overline{b_j k} + \frac{n-m}{2} \cdot r, \quad k = 1, \cdots, r-1;$

(ii) $n+m$ 個の元の集合 $\{a_i, -b_j\}$ は $(n+m)/2$ 個の 2 つずつの組 $(a_i, a_{i'})$, $(b_j, b_{j'})$, $(a_i, -b_j)$ に分けられて各組の 2 数の和が r を法として 0 になっている．

定理 7.3.17 巡回商特異点 $(X, x) = (\mathbb{C}^3, 0)/G$, $\#G = r$ が，端末特異点であることと，$\frac{1}{r}(a, -a, 1)$ 型であることは同値である．ただし a と r は互いに素である．

［証明］ 7.3.15 より $\frac{1}{r}(a, b, c)$ 型が端末特異点であることと

$$(1) \qquad \overline{ak} + \overline{bk} + \overline{ck} = \overline{dk} + r, \quad \overline{dk} > 0, \quad k = 1, \cdots, r-1$$

が同値であった．$\frac{1}{r}(a, -a, 1)$ は，この条件をみたしているので，この型のものが端末特異点であることは良い．逆に端末特異点とすると，(X, x) は孤立特異点であるので G の作用は 0 の外では自由．よって a, b, c はそれぞれ r と素で

なければならない．(1) が成立することより端末補題の (i) で $n=3$, $m=1$ としたときの式が成立することが出る．よって補題の (ii) の主張を得る．すなわち $a+b\equiv 0$ (mod. r), $c-d\equiv 0$ (mod. r). したがって $\frac{1}{r}(a,b,c)=\frac{1}{r}(a,-a,c)$. c は r と素だから 1 として良い．

次に特異な超曲面 $(Y,0)\subset(\mathbb{C}^4,0)$ の巡回商になっている 3 次元端末特異点の分類定理を紹介してこの節を終ることにする．これは森により定理 7.3.12 を用いて緻密な計算により得られたが，これが 3 次元の極小モデル問題の解決につながった．

定理 7.3.18　(I)　(森 [Mo2, Theorem 12, 23, 25])　$(Y,0)\subset(\mathbb{C}^4,0)$ を $f=0$ で定義される，特異な cDV 特異点，G を位数 r の巡回群で $(Y,0)\subset(\mathbb{C}^4,0)$ に作用しているとする．$(X,x)=(Y,0)/G$ が端末特異点なら，r, $\mathbb{C}^4/G$ の型 $\frac{1}{r}(a_1,a_2,a_3,a_4)$, f の標準形は次のいずれかである．

	r	型		f	条件
(1)	任意	$\dfrac{1}{r}(a,-a,1,0)$		$xy+g(z^r,t)$	$g\in\mathfrak{m}^2,\ (a,r)=1$
(2)	4	$\dfrac{1}{4}(1,1,3,2)$		$xy+z^2+g(t)$	$g\in\mathfrak{m}^3$
			または	$x^2+z^2+g(y,t)$	$g\in\mathfrak{m}^3$
(3)	2	$\dfrac{1}{2}(0,1,1,1)$		$x^2+y^2+g(z,t)$	$g\in\mathfrak{m}^4$
(4)	3	$\dfrac{1}{3}(0,2,1,1)$		$x^2+y^3+z^3+t^3$	
			または	$x^2+y^3+z^2t+yg(z,t)+h(z,t)$	$g\in\mathfrak{m}^4,\ h\in\mathfrak{m}^6$
			または	$x^2+y^3+z^3+yg(z,t)+h(z,t)$	$g\in\mathfrak{m}^4,\ h\in\mathfrak{m}^6$
(5)	2	$\dfrac{1}{2}(1,0,1,1)$		$x^2+y^3+yzt+g(z,t)$	$g\in\mathfrak{m}^4$
			または	$x^2+yzt+y^n+g(z,t)$	$g\in\mathfrak{m}^4,\ n\geq 4$
			または	$x^2+yz^2+y^n+g(z,t)$	$g\in\mathfrak{m}^4,\ n\geq 3$
(6)	2	$\dfrac{1}{2}(1,0,1,1)$		$x^2+y^3+yg(z,t)+h(z,t)$	$g,h\in\mathfrak{m}^4,\ h_4\neq 0.$

(II) (Kollár-Shepherd Barron [KSB, 6.5]) (1)–(6) のそれぞれをみたす f が孤立特異点を定義し，$\mathbb{Z}_r$ の作用が原点以外で自由なら，その商は端末特異点 (X, x) を与える．

7.4 高次元孤立 1-Gorenstein 特異点

この節では特異点はすべて孤立特異点であると仮定する．n 次元 1-Gorenstein 孤立特異点 (X, x) は次のいずれかであった (5.3.12).

(i) $\kappa_\delta(X, x) = -\infty \iff (X, x)$ は有理 Gorenstein 特異点.

(ii) $\kappa_\delta(X, x) = 0 \iff \delta_m(X, x) = 1, \ {}^\forall m \in \mathbb{N}.$
$\iff (X, x)$ は対数的標準特異点であって対数的端末特異点ではない.

(iii) $\kappa_\delta(X, x) = n \iff (X, x)$ は対数的標準特異点ではない.

1-Gorenstein 特異点の例として超曲面特異点があるが，上の 3 つの場合をニュートン図形によって判定することができる．

定理 7.4.1 ([WH], [Re2], [I10, Cor.1.7]) $(X, x) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ を方程式 $f = 0$ で定義される超曲面孤立特異点とする．$\Gamma_+(f)$ をニュートン図形，$\partial\Gamma_+(f)$ をその境界，$\Gamma_+(f)^0$ をその内点全体の集合とする．

(I) (i) $\kappa_\delta(X, x) = -\infty$ ならば $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1) \in \Gamma_+(f)^0$

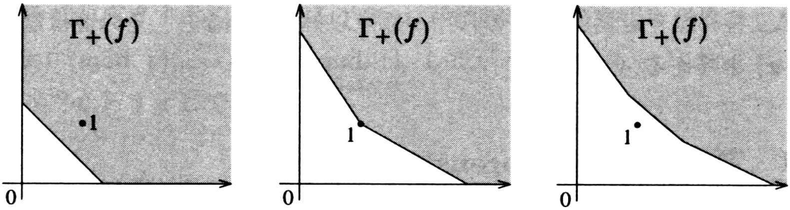
(ii) $\kappa_\delta(X, x) \leq 0$ ならば $\mathbf{1} \in \Gamma_+(f)$

(II) 特に f が非退化であるとき次が成立する

(iii) $\kappa_\delta(X, x) = -\infty \iff \mathbf{1} \in \Gamma_+(f)^0$

(iv) $\kappa_\delta(X, x) = 0 \iff \mathbf{1} \in \partial\Gamma_+(f)$

(v) $\kappa_\delta(X, x) = n \iff \mathbf{1} \notin \Gamma_+(f)$



$\kappa_\delta = -\infty$　　　$\kappa_\delta = 0$　　　$\kappa_\delta = n$

例 7.4.2　(i)　$f = x_0^{a_0} + x_1^{a_1} + \cdots + x_n^{a_n}$ とすると，これは非退化になり f で定義される超曲面特異点を $(X, x) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ とすると

$$\kappa_\delta(X, x) = -\infty \iff \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i} > 1$$

$$\kappa_\delta(X, x) = 0 \iff \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i} = 1$$

$$\kappa_\delta(X, x) = n \iff \sum_{n=0}^{n} \frac{1}{a_i} < 1$$

(ii)　$f = x_0 x_1 \cdots x_n + x_0^{a_0} + \cdots + x_n^{a_n}$, $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i} < 1$ とするとこれは非退化となり f で定義される超曲面特異点 $(X, x) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ は $\kappa_\delta(X, x) = 0$ となる．これらは 2 次元の場合カスプ特異点 (6.6.8) になる．

定義 7.4.3　正規孤立 1-Gorenstein 特異点 (X, x) の良解消 $f : Y \to X$ に対して

$$K_Y = f^* K_X + \sum_{i \in I} m_i E_i - \sum_{j \in J} m_j E_j,$$
$$I \cap J = \emptyset, \quad m_i \geq 0 \quad (i \in I), \quad m_j > 0 \quad (j \in J)$$

とする．$E_J := \sum_{j \in J} m_j E_j$ を f の**本質的因子** (essential divisor) とよぶ．特に $K_Y = f^* K_X - \sum_{j \in J} m_j E_j$ なる良解消を**本質的良解消** (essential good

resolution) とよぶ.

実際 E_J は次の意味で本質的である.

命題 7.4.4 $f: Y \to X$ を n 次元正規孤立 1-Gorenstein 特異点の良解消，E_J を f の本質的因子とする．$E = f^{-1}(x)_{\text{red}}$ に台をもつ正因子 D について次が成立する：

(i) $D \geq E_J$ なる任意の D に対して

$$h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = p_g(X, x)$$

(ii) $D \not\geq E_J$ なる任意の D に対して

$$h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) < p_g(X, x)$$

(iii) D を E_J の成分を含まないとすると

$$h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = 0$$

［証明］ まず 7.1.17 の証明の最初に見たように，双対性から $\dim R^{n-1} f_* \mathcal{O}_Y = \dim \omega_X / f_* \omega_Y$ であった.

さて任意の D について完全列：

$$0 \longrightarrow f_*\omega_Y \longrightarrow f_*\omega_Y(D) \longrightarrow f_*\omega_D \longrightarrow R^1 f_*\omega_Y = 0$$

から $\Gamma(D, \omega_D) = f_*\omega_D = f_*\omega_Y(D)/f_*\omega_Y$ を得る．いま $K_Y = f^*K_X + \sum_{i \in I} m_i E_i - \sum_{j \in J} m_j E_j$, $m_i \geq 0$ $(i \in I)$ $m_j > 0$ $(j \in J)$ とすると，ω_X の生成元 ω に対して $\nu_{E_i}(\omega) = m_i$ $(^\forall i \in I)$, $\nu_{E_j}(\omega) = -m_j$ $(^\forall j \in J)$ であるから $\omega_X = f_*\omega_Y(E_J)$.

(i) $D \geq E_J$ とすると $\omega_X = f_*\omega_Y(D)$. よって

$$\begin{aligned} p_g(X, x) &= \dim R^{n-1} f_* \mathcal{O}_Y = \dim \omega_X / f_*\omega_Y = \dim f_*\omega_Y(D)/f_*\omega_Y \\ &= \dim \Gamma(D, \omega_D) \end{aligned}$$

であるが，最後の項は Serre の双対定理 ([Ha2, III, 7.6]) により $h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D)$ に等しい．

(ii)　$D \not\geq E_J$ の場合 $\omega \notin f_*\omega_Y(D)$ であるから，

$$f_*\omega_Y(D)/f_*\omega_Y \subsetneq \omega_X/f_*\omega_Y$$

より $h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) < p_g(X, x)$.

(iii)　D が E_J の成分を含まないとする．$\nu_{E_i}(\omega) = m_i \geq 0$ $(i \in I)$ より ω_X の任意の元は D 上で極を持たない．したがって $f_*\omega_Y(D) = f_*\omega_Y$. よって $h^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = \dim f_*\omega_Y(D)/f_*\omega_Y = 0$.

以後 $\kappa_\delta = 0$ となる 1-Gorenstein 正規孤立特異点を詳しく調べることにしよう．$\kappa_\delta(X, x) = 0$ なることと対数的標準であって対数的端末でないことと同値であったので，本質的因子 E_J が被約になることと同値であることに注意しておこう．また，このとき $p_g(X, x) = \delta_1(X, x) = 1$ であるので 7.4.4 より任意の $D \geq E_J$ なる被約な正因子 D に対し $H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) = \mathbb{C}$. また D は正規交差因子であるので Du Bois 多様体である．よって 7.1.11,(iii), 7.1.6,(vi) より

$$\mathbb{C} = H^{n-1}(D, \mathcal{O}_D) \simeq Gr_F^0 H^{n-1}(D, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} H_{n-1}^{0,i}(D).$$

したがって $H_{n-1}^{0,i}(D) \neq 0$ なる $0 \leq i \leq n-1$ が一意的に存在する．

定義 7.4.5　(X, x) を $\kappa_\delta(X, x) = 0$ なる 1-Gorenstein 正規孤立特異点とする．上記の記号のもとで $H_{n-1}^{0,i}(D) \neq 0$ のとき特異点 (X, x) を $(0, i)$-型であるという．次の命題により型は良特異点解消 f のとり方によらないことがわかる．

命題 7.4.6　$\kappa_\delta(X, x) = 0$ なる 1-Gorenstein 正規特異点 (X, x) の型は，良特異点解消のとり方によらない．

[証明]　$D = f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ の場合に示せば良い．$f_i : Y_i \to X$ $(i = 1, 2)$ を 2 つの良特異点解消とする．$f_2 = f_1 \circ \sigma$: $Y_2 \xrightarrow{\sigma} Y_1 \xrightarrow{f_1} X$ と分解しているときに示

せば十分．また X を射影多様体に埋め込むことにより Y_1, Y_2 を非特異完備多様体と思って良い．$E^{(i)} := f_i^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ とすると，次の混合 Hodge 構造の完全列を得る：

$$\begin{aligned}\cdots \to H^{n-1}(Y_1,\mathbb{C}) &\longrightarrow H^{n-1}(Y_2,\mathbb{C}) \oplus H^{n-1}(E^{(1)},\mathbb{C}) \\ &\longrightarrow H^{n-1}(E^{(2)},\mathbb{C}) \longrightarrow H^n(Y_1,\mathbb{C}).\end{aligned}$$

Gr_F^0 をとることにより次の完全列を得る：

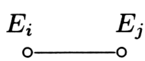
$$\begin{aligned}Gr_F^0 H^{n-1}(Y_1,\mathbb{C}) &\longrightarrow Gr_F^0 H^{n-1}(Y_2,\mathbb{C}) \oplus Gr_F^0 H^{n-1}(E^{(1)},\mathbb{C}) \\ &\xrightarrow{\alpha} Gr_F^0 H^{n-1}(E^{(2)},\mathbb{C}) \xrightarrow{\beta} Gr_F^0 H^n(Y_1,\mathbb{C}).\end{aligned}$$

ここで Y_j は完備非特異だから 7.1.6,(v), (vi) より $Gr_F^0 H^i(Y_j,\mathbb{C}) = H^{0,i}(Y_j)$. したがって，$E^{(2)}$ に対して 7.1.6,(vi) を適用すれば β は零写像になるので，α は全射になる．また $Gr_F^0 H^{n-1}(E^{(2)}) = H^{0,i}_{n-1}(E^{(2)})$ $(i < n-1)$ のときは，この成分は $Gr_F^0 H^{n-1}(E^{(1)},\mathbb{C})$ から来る．$Gr_F^0 H^{n-1}(E^{(2)},\mathbb{C}) = H^{0,n-1}_{n-1}(E^{(2)})$ のときは $Gr_F^0 H^{n-1}(E^{(1)},\mathbb{C})$ も $(0,n-1)$-型にならねばならない．実際もし $(0,i)$-型 $(i < n-1)$ とすると $G_F^0 H^{n-1}(Y_1,\mathbb{C})$ は $(0,n-1)$-成分しか持たないので，$(0,i)$-成分は，$Gr_F^0 H^{n-1}(E^{(2)},\mathbb{C})$ に単射で埋め込まれなければならないので矛盾．

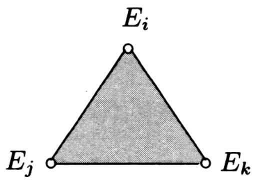
例外因子の概形を調べるために次のような複体を対応させよう．

定義 7.4.7 非特異代数多様体 Y の上の単純正規交差因子 $E = \sum_{i=1}^r E_i$ に対して**双対複体** (dual complex) Γ_E を次のように定義する：

(1) 各既約成分 E_i に対して頂点 $\circ$ を対応させる．

(2) 2 つの既約成分 E_i, E_j の交わりに，E_i, E_j に対応する 2 つの頂点を結ぶ線分を対応させる．

(3) 3 つの既約成分 E_i, E_j, E_k の交わりに E_i, E_j, E_k に対応する頂点からなる三角形 (2 次形単体) を対応させる



$\cdots\cdots$

(i)　i 個の既約成分 $E_1, \cdots, E_i$ の交わりに，$E_1, \cdots, E_i$ に対応する頂点からなる $i-1$ 次元単体を対応させる

$\cdots\cdots$

これにより $(n-1)$ 次元単純正規交差因子 E に対して高々 $(n-1)$ 次元の単体的複体 Γ_E が対応する．

特異点の型は例外因子の双対複体にどんな影響を与えるのだろうか．

命題 7.4.8　$f: Y \to X$ を $\kappa_\delta(X, x) = 0$ なる n-次元 1-Gorenstein 正規孤立特異点 (X, x) の良特異点解消で，$E = f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ が単純正規交差因子となるものとする．(X, x) が $(0, i)$ 型とすると

$$\dim \Gamma_{E_J} \geq n - 1 - i$$

となる．特に $i = 0, n-1$ のとき，等号が成立する．よって $(0, n-1)$-型の本質的因子は既約である．

［証明］ 不等式は次の補題より従う．等号については一般に $\dim \Gamma_{E_J} \leq n-1$ より $i = 0$ のとき等号成立は明らか．$i = n-1$ のとき，E_J が既約になることを示せば良い．$E_J = E_1 + E_2$ と分解されたとすると，Mayer-Vietoris 完全列 (7.1.8):

$$H^{n-2}(E_1 \cap E_2, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-1}(E_J, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-1}(E_1, \mathbb{C}) \oplus H^{n-1}(E_2, \mathbb{C})$$

より Gr_F^0 をとることによって

$$H^{n-2}(E_1 \cap E_2, \mathcal{O}_{E_1 \cap E_2}) \longrightarrow H^{n-1}(E_J, \mathcal{O}_{E_J}) \longrightarrow H^{n-1}(E_1, \mathcal{O}_{E_1}) \oplus H^{n-1}(E_2, \mathcal{O}_{E_2})$$

を得るが，$p_g(X, x) = 1$ と 7.4.4,(ii) より $H^{n-1}(E_i, \mathcal{O}_{E_i}) = 0$, $i = 1, 2$. よって中央の項の $(0, n-1)$-成分は左から来るはずであるが，左の項には 7.1.6,(vi) より $(0, n-1)$-成分はないので矛盾．したがって E_J は既約である．

補題 7.4.9 E を n 次元非特異多様体上の単純正規交差因子とする．$H^{0,i}_{n-1}(E) \neq 0$ のとき，$\dim \Gamma_E \geq n - i - 1$.

［証明］ E の既約因子 $E_1, \cdots, E_{n-i}$ が存在して $E_1 \cap \cdots \cap E_{n-i} \neq \emptyset$ を示せば十分である．

$H^{0,i}_{n-1}(E') \neq 0$ となる極小の $E' \leq E$ をとる．E' が既約ならば非特異なので，7.1.6,(v), (vi) から $i = n - 1$. よって $\dim \Gamma_E \geq 0 = n - (n-1) - 1$ となり補題が成立．E' が既約でないとき，既約な $E_1 < E'$ をとり $E' = E_1 + E_1^\vee$ と分解できる．E' の極小性より，$H^{0,i}_{n-1}(E_1) = H^{0,i}_{n-1}(E_1^\vee) = 0$. したがって，完全列：

$$H^{n-2}(E_1 \cap E_1^\vee, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-1}(E', \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-1}(E_1, \mathbb{C}) \oplus H^{n-1}(E_1^\vee, \mathbb{C})$$

において中央の項の $(0, i)$-成分は左の項から来る．

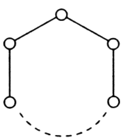
よって $H^{0,i}_{n-2}(E_1 \cap E_1^\vee) \neq 0$. 次に $E_1^\vee$ を必要なら小さくとり直して $H^{0,i}_{n-2}(E_1 \cap E_1^\vee, \mathbb{C}) \neq 0$ なる極小のものとする．$E_1 \cap E_1^\vee$ が既約のとき 7.1.6,(v), (vi) から $i = n - 2$. よって $\dim \Gamma_E \geq \dim \Gamma_{E_1 + E_1^\vee} \geq 1 = n - (n-2) - 1$ となり補題が成立．$E_1 \cap E_1^\vee$ が既約でないとき，既約な $E_2 < E_1^\vee$ をとり $E_1^\vee = E_2 + E_2^\vee$ と分解できる．分解 $E_1 \cap E_1^\vee = E_1 \cap E_2 + E_1 \cap E_2^\vee$ について上と同様の議論で，$H^{0,i}_{n-3}(E_1 \cap E_2 \cap E_2^\vee, \mathbb{C}) \neq 0$ を得る．この操作を順次続けてゆけば，$H^{0,i}_i(E_1 \cap E_2 \cdots \cap E_{n-i-1} \cap E^\vee_{n-i-1}) \neq 0$ が得られる．したがって $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-i-1} \cap E^\vee_{n-i-1} \neq \emptyset$.

良特異点解消が本質的良特異点解消であるときは 7.4.8 の等号が成立する．ここで本質的良特異点解消は任意の 2 次元正規特異点については存在するが 3 次元以上ではまだわかっていない．

命題 7.4.10　(石井 [I2])　(X,x) を $\kappa_\delta(X,x)=0$ なる 1-Gorenstein 正規孤立特異点，$f:Y\to X$ をその本質的良解消とする．本質的因子を E_J とすると，

$$\dim\Gamma_{E_J}=n-i-1$$

2 次元の $\kappa_\delta=0$ なる 1-Gorenstein 特異点について，各型がどんな特異点になるかみてみよう．

例 7.4.11　(X,x) を $\kappa_\delta(X,x)=0$ なる 2 次元正規 1-Gorenstein 特異点とする．2 次元正規 1-Gorenstein 特異点は Gorenstein 特異点であるから 6.8.1 より (X,x) は，単純楕円型かカスプ特異点であることがわかる．ともに最小特異点解消は本質的良解消になり，本質的因子 E_J はそれぞれ 1 つの楕円曲線または有限個の $\mathbb{P}^1$ からなる輪状になっているので．その双対グラフはそれぞれ，1 点 ∘ または輪状  になっている．よって次元はそれぞれ 0 次元，1 次元となり，前者が $(0,1)$-型，後者が $(0,0)$-型になる．

3 次元の $\kappa_\delta=0$ なる 1-Gorenstein 特異点について各型の例をみてみよう．

例 7.4.12　(i)　S を Abel 曲面，または $K3$-曲面とし (X,x) を S 上の錐 (cf. 5.3.13) とする．このとき (X,x) は $\kappa_\delta(X,x)=0$ なる 1-Gorenstein 特異点で $(0,2)$-型である．

(ii)　$S_1\subset\mathbb{P}^3$ を超平面，$S_2\subset\mathbb{P}^3$ を次数 3 の超曲面で $S=S_1+S_2$ が正規交差になっているようにとる．$D\subset\mathbb{P}^3$ を一般の 5 次超曲面，$C:=S\cap D$ とする．$b:Y\to\mathbb{P}^3$ を C を中心とする blow-up とし，E を S の狭義の逆像とする．このとき正規多様体 X への射 $f:Y\to X$ が存在して $f(E)=x$ (一点) $f|_{Y\setminus E}:Y\setminus E\ \tilde{\to}\ X\setminus\{x\}$ 同型となる．このとき (X,x) は [I2, Lemma 5.1] より $\kappa_\delta(X,x)=0$ なる 1-Gorenstein 特異点となり，$(0,1)$-型になる．この特異点

の任意の良特異点解消の本質的因子の双対複体は鎖状になる.

(iii) $S_i \subset \mathbb{P}^3$ を $x_i = 0$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ で定義される座標平面とする. $S := S_0 + \cdots + S_3$ として, (ii) と同様に $Y, (X, x)$ を作ると (X, x) は $\kappa_\delta(X, x) = 0$ なる 1-Gorenstein 特異点となり $(0, 0)$-型になる. このとき本質的因子の双対複体は S^2 の単体分割になる.

(iv) 土橋は [Ts1, 2] において, カスプ特異点の高次元への一般化とみなせる特異点 (土橋カスプ特異点とよばれる) を構成した. これらは $\kappa_\delta(X, x) = 0$ になり 3 次元の場合は本質的因子の双対複体が球面, 実射影平面, クラインの壺以外のコンパクト曲面の単体分割になっている. これらが $(0, 0)$-型の例である.

定義 7.4.13 3 次元 1-Gorenstein 特異点 (X, x) が $\kappa_\delta(X, x) = 0$ で $(0, 2)$-型であるとする. このとき次のように定義する:

> (X, x) がさらに Gorentein 特異点であるとき, **単純 $K3$-特異点** (simple $K3$-singularity) とよぶ, (X, x) が Gorenstein 特異点でないとき, **単純 Abel-特異点** (simple Abelian singularity) とよぶ.

これらは 2 次元の単純楕円型特異点の 3 次元版とみなすことができる. 2 次元の場合 1-Gorenstein 特異点で $\kappa_\delta(X, x) = 0$ をみたし $(0, 1)$-型のものは単純楕円型だったので, その最小特異点解消の例外因子の形による特徴づけがあった. これと同様の特徴づけが 3 次元の場合にもあることを紹介する. 3 次元では最小特異点解消に代わるものとして $\mathbb{Q}$-分解的な極小モデルが存在するのであった (7.2.9,(1) 参照).

命題 7.4.14 (石井-渡辺 [IW]) 3 次元正規孤立特異点 (X, x) が単純 $K3$-特異点 (または単純 Abel 特異点) であることと, その $\mathbb{Q}$-分解的極小モデル $f : Y \to X$ の例外因子 E が既約であって, 正規 $K3$-曲面 (または Abel 曲面) であることは同値である. ここで正規 $K3$-曲面とは正規曲面であって, 最小特異点解消が $K3$-曲面になるものをいう.

超曲面特異点が $(0, n-1)$-型のときどんな形の方程式で定義されるのであろうか.

命題 7.4.15 (渡辺 [W2])　$(X, x) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ が非退化な多項式 f で定義される孤立特異点とする. (X, x) が $\kappa_\delta(X, x) = 0$ かつ $(0, n-1)$-型であることと, $\partial\Gamma_+(f)$ のある n 次元の面が $(1, \cdots, 1)$ を相対内部として含むこととは同値である. よって特に f が $\sum_{i=0}^n p_i = 1$ なる重み $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \cdots, p_n)$ を持つ擬斉次多項式である場合 $\kappa_\delta(X, x) = 0$ かつ $(0, n-1)$-型である. ここで $f(x_0, \cdots, x_n)$ が重み $\mathbf{p} = (p_0, \cdots, p_n)$ を持つ擬斉次多項式であるとは, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}^*$ に対して $f(\lambda^{p_0} x_0, \lambda^{p_1} x_1, \cdots, \lambda^{p_n} x_n) = \lambda f(x_0, \cdots, x_n)$ が成立することをいう.

例 7.4.16　2次元単純楕円型特異点で, 超曲面となるものは次の方程式で定義された

$$\widetilde{E}_6;\ \ y(y-x)(y-\lambda x) - xz^2 = 0$$
$$\widetilde{E}_7;\ \ yx(y-x)(y-\lambda x) - z^2 = 0$$
$$\widetilde{E}_8;\ \ y(y-x^2)(y-\lambda x^2) - z^2 = 0$$

$$\lambda \in \mathbb{C} \quad \lambda \neq 0, 1$$

これらはすべて擬斉次であり重みはそれぞれ $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ となる.

例 7.4.17　3次元単純 $K3$-特異点で超曲面となるもののうち擬斉次多項式で定義されるものは米村 [Y] により次のように 95 通りに分類された.

No.	重み $\mathbf{p}$	f
1	$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$	$x^4+y^4+z^4+w^4$
2	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{6}\right)$	$x^3+y^4+z^4+w^6$
3	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$	$x^3+y^3+z^6+w^6$
4	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{12}\right)$	$x^3+y^3+z^4+w^{12}$
5	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$	$x^2+y^6+z^6+w^6$
6	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right)$	$x^2+y^5+z^5+w^{10}$
7	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$	$x^2+y^4+z^8+w^8$
8	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$	$x^2+y^4+z^6+w^{12}$
9	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{20}\right)$	$x^2+y^4+z^5+w^{20}$
10	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{12},\frac{1}{12}\right)$	$x^2+y^3+z^{12}+w^{12}$
11	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{10},\frac{1}{15}\right)$	$x^2+y^3+z^{10}+w^{15}$
12	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{18}\right)$	$x^2+y^3+z^9+w^{18}$
13	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{8},\frac{1}{24}\right)$	$x^2+y^3+z^8+w^{24}$
14	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{42}\right)$	$x^2+y^3+z^7+w^{42}$
15	$\left(\frac{1}{3},\frac{4}{15},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$	$x^3+y^3z+y^3w+z^5-w^5$
16	$\left(\frac{1}{3},\frac{7}{24},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$	$x^3+y^3w+z^4+w^8$
17	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{2}{15}\right)$	$x^3+y^3+z^5+xw^5+yw^5+zw^6$
18	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{9},\frac{1}{9}\right)$	$x^3+y^3+xz^3+yz^3+z^4w+w^9$
19	$\left(\frac{3}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$	$x^2y+x^2z+x^2w^2+y^4+z^4+w^6$
20	$\left(\frac{3}{8},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{24}\right)$	$x^2z+x^2w^6+y^3+z^4+w^{24}$

No.	重み $\mathbf{p}$	f
21	$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$	$x^2y + x^2z + x^2w + y^5 + z^5 + w^5$
22	$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}\right)$	$x^2z + x^2w^3 + y^3 + z^5 - w^{15}$
23	$\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$	$x^2z + x^2w + y^4 + z^6 + w^6$
24	$\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$	$x^2z + x^2w^2 + y^3 + z^6 + w^{12}$
25	$\left(\frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$	$x^2z +^2 w + y^3 + z^9 - w^9$
26	$\left(\frac{9}{20}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right)$	$x^2w + y^4 + z^5 + w^{10}$
27	$\left(\frac{11}{24}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}\right)$	$x^2w + y^3 + z^8 + w^{12}$
28	$\left(\frac{10}{21}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{21}\right)$	$x^2w + y^3 + z^7 + w^{21}$
29	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{15}\right)$	$x^2 + y^5 + z^6 + yw^6 + z^2w^5$
30	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{7}{40}, \frac{1}{8}\right)$	$x^2 + y^5 + z^5w + w^8$
31	$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{24}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}\right)$	$x^2 + y^4z + y^3w^3 + z^6 + w^8$
32	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{14}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right)$	$x^2 + y^4z + y^4w + z^7 - w^7$
33	$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}\right)$	$x^2 + y^3z^2 + y^4w + z^6 - w^9$
34	$\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{30}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}\right)$	$x^2 + y^4w + z^5 + w^{15}$
35	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{3}{28}\right)$	$x^2 + y^4 + z^7 + yw^7 + zw^8$
36	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{20}, \frac{1}{10}\right)$	$x^2 + y^4 + yz^5 + z^6w + w^{10}$
37	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}\right)$	$x^2 + y^4 + yz^4 + z^5w + w^{36}$
38	$\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{15}, \frac{1}{5}, \frac{1}{30}\right)$	$x^2 + y^3z + y^3w^6 + z^5 - w^{30}$
39	$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}\right)$	$x^2 + y^3z + y^3w^3 + z^6 + w^{18}$
40	$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{14}\right)$	$x^2 + y^3z + y^3w^2 + z^7 - w^{34}$

No.	重み $\mathbf{p}$	f
41	$\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{24}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}\right)$	$x^2 + y^3z + y^2w^5 + z^8 + w^{12}$
42	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$	$x^2 + y^3z + y^3w + z^{10} + w^{10}$
43	$\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}\right)$	$x^2 + y^3w + z^9 + w^{12}$
44	$\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right)$	$x^2 + y^2z^3 + y^3w + z^8 + w^{16}$
45	$\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{28}, \frac{1}{7}, \frac{1}{28}\right)$	$x^2 + y^3w + z^7 + w^{28}$
46	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{11}, \frac{5}{66}\right)$	$x^2 + y^3 + z^{11} + zw^{12}$
47	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{21}, \frac{1}{14}\right)$	$x^2 + y^3 + yz^7 + z^9w^2 + w^{14}$
48	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{48}, \frac{1}{16}\right)$	$x^2 + y^3 + z^9w + w^{16}$
49	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{42}, \frac{1}{21}\right)$	$x^2 + y^3 + z^8w + w^{21}$
50	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{1}{30}\right)$	$x^2 + y^3 + yz^5 + z^7w^2 + w^{30}$
51	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{36}, \frac{1}{36}\right)$	$x^2 + y^3 + z^7w + w^{36}$
52	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{7}{36}\right)$	$x^3 + y^4 + xz^3 + zw^4$
53	$\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{18}, \frac{2}{9}, \frac{1}{6}\right)$	$x^3 + y^3w + y^2z^2 + xz^3 + z^3w^2 + w^6$
54	$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{5}{21}, \frac{1}{7}\right)$	$x^3 + y^3w + yz^3 + z^3w^2 - w^7$
55	$\left(\frac{7}{20}, \frac{3}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}\right)$	$x^2y + x^2w^3 + y^3w + z^4 - w^{10}$
56	$\left(\frac{11}{30}, \frac{4}{15}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right)$	$x^2y + y^3z + z^5 + w^6$
57	$\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{24}, \frac{1}{6}\right)$	$x^2y + y^4 + xz^3 + z^4w + w^6$
58	$\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$	$x^2z + x^2w^4 + xy^2 + y^3w + z^4 + w^{16}$
59	$\left(\frac{8}{21}, \frac{1}{3}, \frac{5}{21}, \frac{1}{21}\right)$	$x^2z + x^2w^5 + y^3 + z^4w - w^{21}$
60	$\left(\frac{7}{18}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{18}\right)$	$x^2z + x^2w^4 + y^3 + yz^3 + z^4w^2 + w^{18}$

No.	重み p	f
61	$\left(\frac{11}{28},\frac{1}{4},\frac{3}{14},\frac{1}{7}\right)$	$x^2z+y^4+z^4w+w^7$
62	$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{3}{20}\right)$	$x^2z+xw^4+y^4+yw^5+z^5+z^2w^4$
63	$\left(\frac{2}{5},\frac{3}{10},\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right)$	$x^2z+x^2w^2+xy^2+y^2z^2+y^3w+z^5+w^{10}$
64	$\left(\frac{5}{12},\frac{7}{24},\frac{1}{6},\frac{1}{8}\right)$	$x^2z+xy^2+y^3w+z^6+w^8$
65	$\left(\frac{14}{33},\frac{1}{3},\frac{5}{33},\frac{1}{11}\right)$	$x^2z+y^3+z^6w+w^{11}$
66	$\left(\frac{3}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7}\right)$	$x^2z+x^2w+xy^2+y^3z+y^38w+z^7+w^7$
67	$\left(\frac{3}{7},\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{2}{21}\right)$	$x^2z+xw^6+y^3+yw^7+z^7+zw^9$
68	$\left(\frac{13}{30},\frac{1}{3},\frac{2}{15},\frac{1}{10}\right)$	$x^2z+y^3+yz^5+z^6w^2+w^{10}$
69	$\left(\frac{7}{16},\frac{1}{4},\frac{3}{16},\frac{1}{8}\right)$	$x^2w+xz^3+y^4+yz^4+z^4w^2+w^8$
70	$\left(\frac{4}{9},\frac{5}{18},\frac{1}{6},\frac{1}{9}\right)$	$x^2w+xy^2+y^3z+y^2+z^6+w^9$
71	$\left(\frac{7}{15},\frac{4}{15},\frac{1}{5},\frac{1}{15}\right)$	$x^2w+xy^2+y^3z+y^3w^3+z^5+w^{15}$
72	$\left(\frac{7}{15},\frac{1}{3},\frac{2}{15},\frac{1}{15}\right)$	$x^2w+xz^4+y^3+xy^5+z^7w+w^{15}$
73	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{4}{25},\frac{7}{50}\right)$	$x^2+y^5+yz^5+zw^6$
74	$\left(\frac{1}{2},\frac{7}{32},\frac{5}{32},\frac{1}{8}\right)$	$x^2+y^4w+yz^5+z^4w^3+w^8$
75	$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{22},\frac{2}{11},\frac{1}{11}\right)$	$x^2+y^4w+y^2z^3+z^5w+w^{11}$
76	$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{13},\frac{5}{26},\frac{1}{13}\right)$	$x^2+y^4w+yz^4+z^4w^3+w^{13}$
77	$\left(\frac{1}{2},\frac{7}{26},\frac{5}{26},\frac{1}{26}\right)$	$x^2+y^3z+y^3w^5+z^5w+w^{26}$
78	$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{11},\frac{2}{11},\frac{1}{22}\right)$	$x^2+y^3z+y^3w^4+yz^4+z^5w^2+w^{22}$
79	$\left(\frac{1}{2},\frac{9}{32},\frac{5}{32},\frac{1}{16}\right)$	$x^2+y^3z+y^2w^7+z^6w+w^{16}$
80	$\left(\frac{1}{2},\frac{13}{44},\frac{5}{44},\frac{1}{11}\right)$	$x^2+y^3z+z^8w+w^{11}$

No.	重み **p**	f
81	$\left(\frac{1}{2},\frac{4}{13},\frac{3}{26},\frac{1}{13}\right)$	$x^2+y^3w+yz^6+z^8w+w^{13}$
82	$\left(\frac{1}{2},\frac{7}{22},\frac{3}{22},\frac{1}{22}\right)$	$x^2+y^3w+yz^5+z^7w+w^{22}$
83	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{5}{54},\frac{2}{27}\right)$	$x^2+y^3+yw^9+z^{10}w+z^2w^{11}$
84	$\left(\frac{1}{3},\frac{7}{27},\frac{2}{9},\frac{5}{27}\right)$	$x^3+xz^3+y^3z+yw^4+z^2w^3$
85	$\left(\frac{5}{14},\frac{2}{7},\frac{3}{14},\frac{1}{7}\right)$	$x^2y+x^2w^2+xz^3+y^3w+y^2z^2+z^4w+w^7$
86	$\left(\frac{9}{25},\frac{7}{25},\frac{1}{5},\frac{4}{25}\right)$	$x^2y+xw^4+y^3w+z^5+zw^5$
87	$\left(\frac{5}{13},\frac{4}{13},\frac{3}{13},\frac{1}{13}\right)$	$x^2z+x^2w^3+xy^2+y^3w+yz^3+z^4w+w^{13}$
88	$\left(\frac{11}{27},\frac{1}{3},\frac{5}{27},\frac{2}{27}\right)$	$x^2z+xw^8+y^3+yw^9+z^5w+zw^{11}$
89	$\left(\frac{5}{11},\frac{3}{11},\frac{2}{11},\frac{1}{11}\right)$	$x^2w+xy^2+xz^3+y^3z+y^3w^2+yz^4+z^5w+w^{11}$
90	$\left(\frac{1}{2},\frac{7}{34},\frac{3}{17},\frac{2}{17}\right)$	$x^2+y^4z+y^2w^5+z^5w+zw^7$
91	$\left(\frac{1}{2},\frac{4}{19},\frac{3}{19},\frac{5}{38}\right)$	$x^2+y^4z+yz^5+yw^6+z^3w^4$
92	$\left(\frac{1}{2},\frac{11}{38},\frac{5}{38},\frac{3}{38}\right)$	$x^2+y^3z+yw^9+z^7w+zw^{11}$
93	$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{17},\frac{2}{17},\frac{3}{34}\right)$	$x^2+y^3z+yz^6+yw^8+z^7w^2+zw^{10}$
94	$\left(\frac{7}{19},\frac{5}{19},\frac{4}{19},\frac{3}{19}\right)$	$x^2y+xz^3+xw^4+y^3z+y^2w^3+z^4w+zw^5$
95	$\left(\frac{7}{17},\frac{5}{17},\frac{3}{17},\frac{2}{17}\right)$	$x^2z+xy^2+zw^5+y^3w+yz^4+yw^6+z^5w+zw^7$

以上のように擬斉次超曲面で $\kappa_\delta = 0$ なる特異点を与える重みは，2 次元では 3 つ，3 次元では 95 個あることがわかった．これは 4 次元では土橋氏によると少なくとも 10,000 個はあるそうである．

第 8 章　特異点の変形

数学の定理は現実的であるほど不確かであり，
確かであるほど現実的でない
(Einstein [Mur, p.109])

この章では特異点をパラメータを変化させることによって変形させることを考える．任意に変形させても，特異点はある秩序をもって変化する．8.1 ではそれを見てやろう．8.2 では，すべての変形を含むような，大きな変形が存在することを紹介する．多様体はすべて $\mathbb{C}$ 上定義されているとする．

8.1　変形による諸性質の変化

定義 8.1.1　(X,x) を代数的整多様体 X 上の特異点とする．代数的整多様体の芽の射 $\pi:(\mathcal{X},x)\to(C,0)$ が (X,x) の**変形** (deformation) であるとは，次が成立することである：

(1)　$\pi:\mathcal{X}\to C$ が**平坦射** (flat morphism) である；すなわち任意の $p\in\mathcal{X}$ に対して，$\mathcal{O}_{\mathcal{X},p}$ は平坦 $\mathcal{O}_{C,\pi(p)}$-加群；

(2)　$\mathcal{X}_t:=\pi^{-1}(t)$, $t\in C$ として，芽の同型 $(\mathcal{X}_0,x)\simeq(X,x)$ がある．

このとき $\mathcal{X}$ を変形の**全空間** (total space) C を変形の**基底空間** (base space) とよぶ．

特に C が非特異曲線であるときに π を **1-パラメータ変形** (1-parameter deformation) とよぶ．

定義 8.1.2　特異点 (X,x) の変形 $\pi:(\mathcal{X},x)\to(C,0)$ に対して，射 $f:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ が π の**同時特異点解消** (simultaneous resolution) であるとは，$\mathcal{X}$, C をそれ

ぞれ x, 0 の十分小さい近傍としたとき，任意の $t \in C$ に対して $f_t := f|_{\mathcal{Y}_t}$: $\mathcal{Y}_t := (\pi \circ f)^{-1}(t) \to \mathcal{X}_t := \pi^{-1}(t)$ が，特異点解消になる場合をいう．また f_t ($^{\forall}t \in C$) が標準モデルになる場合 f を**同時標準モデル** (simultaneous canonical model) という．

この節では 1-パラメータ変形の場合に，特異点 $(X, x) \cong (\mathcal{X}_0, x)$ の性質が十分 0 に近い $t \in C$ に対し，$\mathcal{X}_t$ の特異点の性質にどう反映するかを調べる．それぞれの主張を述べる前に表にまとめたものを挙げておこう．

表 8.1.3

仮定する $(\mathcal{X}_0, x)$ の条件	$(\mathcal{X}, x)$ の性質	$\mathcal{X}_t$ ($t \in C$, t は 0 に十分近い) の性質
非特異	非特異 (8.1.5)	非特異 (8.1.5)
Cohen-Macaulay	Cohen-Macaulay (8.1.6)	Cohen-Macaulay (8.1.6)
Gorenstein	Gorenstein (8.1.6)	Gorenstein (8.1.6)
$\mathbb{Q}$-Gorenstein	一般には $\mathbb{Q}$-Gorenstein ではない (8.1.7) ある条件のもとで $\mathbb{Q}$-Gorenstein (8.1.9, 8.1.11)	一般には $\mathbb{Q}$-Gorenstein ではない (8.1.8) ある条件のもとで $\mathbb{Q}$-Gorenstein (8.1.9, 8.1.11)
有理的	有理的 (8.1.12)	有理的 (8.1.12)
Du Bois	?	一般には Du Bois でない (8.1.13)
端末	3 次元のとき端末 (8.1.16) 4 次元以上では ?	3 次元のとき端末 (8.1.16) 4 次元以上では ?
標準	ある条件のもとで標準 (8.1.17) 一般には ?	ある条件のもとで標準 (8.1.17) 一般には ?

対数的端末	一般には対数的端末ではない (8.1.18) ある条件のもとで対数的端末 (8.1.19)	一般には対数的端末ではない (8.1.18) ある条件のもとで対数的端末 (8.1.19) (8.1.27)
対数的標準	一般には対数的標準ではない (8.1.18)	一般には対数的標準ではない (8.1.18) ある条件のもとで対数的標準 (8.1.27)
商特異点	一般には商特異点ではない (8.1.20) $\mathrm{codim} X_{\mathrm{sing}} \geq 3$ なら直積 $X \times C$ (8.1.23)	2 次元のとき商特異点 (8.1.21) $\mathrm{codim} X_{\mathrm{sing}} \geq 3$ なら X と同型 (8.1.23)

また孤立特異点の不変数の，変形のもとでの挙動については次の表にまとめられる．ここで不変数 P が**上半連続** (upper semi-continuous) (または**下半連続** (lower semi-continuous)) であるとは，$\mathcal{X}$, C を x, 0 の近傍として十分小さくとれば $P(\mathcal{X}_0, x) \geq P(\mathcal{X}_t, y)$, $y \in \mathcal{X}_t$, $t \in C$ (または $P(\mathcal{X}_0, x) \leq P(\mathcal{X}_t, y)$, $y \in x_t$, $t \in C$) となることである．

表 8.1.4

不変数	変形による変化
emb	上半連続 (8.1.24)
p_g	上半連続 (8.1.25)
δ_m	上半連続 (8.1.26)
γ_m	ある条件のもとで上半連続 (8.1.28)
$\kappa_\delta = 0$, 1-Gorenstein 特異点の型 $(0, r)$	ある条件のもとで下半連続 (8.1.29)

まず非特異点が変形によってどうなるかを見てみよう.

定理 8.1.5　$\pi : (\mathcal{X}, x) \to (C, 0)$ を (X, x) の 1-パラメータ変形，(X, x) を非特異とする．このとき，$(\mathcal{X}, x)$ は非特異になり $\mathcal{X}, C$ をそれぞれ $x, 0$ の十分小さい近傍とすると $\mathcal{X}_t$ $(t \in C)$ も非特異になる.

［証明］ C において，点 0 はカルティエ因子であるから $\mathcal{X}_0 = \pi^{-1}(0)$ もカルティエ因子. x の近傍での $\mathcal{X}_0$ の定義イデアルを (h) とすると，$\Omega_{\mathcal{X}_0} = \Omega_{\mathcal{X}}/dh$. 仮定より $\Omega_{\mathcal{X}_0,x}$ は $\dim \mathcal{X}_0$ 個の元で生成されているので $\Omega_{\mathcal{X},x}$ は $\dim \mathcal{X}_0 + 1 = \dim \mathcal{X}$ 個の元で生成されている．よって $(\mathcal{X}, x)$ は非特異である．[EGA IV, 17.5.1] より π は点 x で smooth 射．したがって $\mathcal{X}, C$ を十分小さくとり直せば，π は $\mathcal{X}$ 上で smooth 射になるので各点 $t \in C$ の逆像 $\mathcal{X}_t = \pi^{-1}(t)$ は非特異.

次に Gorenstein 性，Cohen-Macaulay 性について調べよう.

定理 8.1.6　$\pi : (\mathcal{X}, x) \to (C, 0)$ を (X, x) の 1-パラメータ変形，(X, x) を Cohen-Macaulay (または Gorenstein) 特異点とする．このとき $(\mathcal{X}, x)$ はまた Cohen-Macaulay (または Gorenstein) 特異点になり，$\mathcal{X}, C$ をそれぞれ $x, 0$ の十分小さい近傍とすると，$\mathcal{X}_t$ $(t \in C)$ も Cohen-Macaulay (または Gorenstein) 特異点をもつ.

［証明］ (X, x) が Cohen-Macaulay (または Gorenstein) 特異点ならば 4.3.12 により $(\mathcal{X}, x)$ も Cohen-Macaulay (または Gorenstein) 特異点．$\mathcal{X}, C$ を十分小さい近傍にとり直せば $\mathcal{X}$ も Cohen-Macaulay (または Gorenstein) 特異点のみをもつ．したがって再び 4.3.12 により $\mathcal{X}_t$ も Cohen-Macaulay (または Gorenstein) 特異点のみをもつ.

上で Gorenstein 性が変形によって保たれることを見たが，$\mathbb{Q}$-Gorenstein 性に関しては保たれないのである．まず変形の全空間が必ずしも $\mathbb{Q}$-Gorenstein にならないことを見よう.

例 8.1.7　$\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点 (X,x) の 1-パラメータ変形 $\pi:(\mathcal{X},x)\to(C,0)$ で $(\mathcal{X},x)$ が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点でない例を構成しよう．

まず 1-パラメータ変形 $\pi:(\mathcal{X},x)\to(C,0)$ で次の性質をもつもの：

(i)　$(\mathcal{X}_0,x)$ は標準的でない 2 次元商特異点．

(ii)　$\mathcal{X}_t$ $(t\neq 0,\ t\in C)$ は非特異曲面．

(iii)　π は同時最小特異点解消 $f:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ をもつ；

をつくれば，求める例になっていることを示そう．(i) より $(\mathcal{X}_0,x)$ は $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点．もしある m に対し $mK_{\mathcal{X}}$ がカルティエ因子になっていたとする．f の例外集合は余次元 2 であるから，$mK_{\mathcal{Y}}\sim f^*mK_{\mathcal{X}}$．よって $m(K_{\mathcal{Y}}+\mathcal{Y}_0)\sim f^*(m(K_{\mathcal{X}}+\mathcal{X}_0))$ より $mK_{\mathcal{Y}_0}\sim f^*(mK_{\mathcal{X}_0})$．しかし $(\mathcal{X}_0,x)$ は標準特異点ではなかったのでこれは矛盾．

次に (i) (ii) (iii) をみたす変形 π を構成しよう．

$U_1,U_2\cong\mathbb{C}$ とし $\mathcal{M}=\mathbb{C}\times U_1\times\mathbb{P}^1\cup\mathbb{C}\times U_2\times\mathbb{P}^1$ を同一視 $(t,z_1,\zeta_1)\leftrightarrow(t,z_2,\zeta_2)$, $z_1=\frac{1}{z_2}$, $\zeta_1=z_2^4\zeta_2+tz_2^2$ で定義し，$\widetilde{\pi}:\mathcal{M}\to\mathbb{C}$, $(t,z,\zeta)\mapsto t$ とすると，[MK, Theorem 4.2] より $\mathcal{M}_0\cong\Sigma_4$, $\mathcal{M}_t\cong\Sigma_0=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ $(t\neq 0)$. $\varphi:\mathcal{M}\to\mathbb{P}^1:(t,z,\zeta)\mapsto z$ として $\varphi^{-1}(P)=:F$ $(P\in\mathbb{P}^1)$ とする．一方 $\psi:\widetilde{\pi}^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})\to\mathbb{P}^1$, $(t,z,\zeta)\mapsto\frac{z_1^2\zeta_1-t}{t\zeta_1}=\frac{\zeta_2}{tz_2^2\zeta_2+t^2}$ による逆像 $\psi^{-1}(Q)$ $(Q\in\mathbb{P})$ の閉包を $H\subset\mathcal{M}$ とする．このとき線型系 $|H+2F|$ は基点をもたず $\widetilde{\pi}=p_2\circ\Phi$ なる射 $\Phi:\mathcal{M}\to\mathbb{P}^5\times\mathbb{C}$ が得られる．$H+2F\,|_{\mathcal{M}_0}\sim C_0+4f$ (C_0 は $\mathcal{M}_0$ の最小切断，f は ruling) なので $\Phi\,|_{\mathcal{M}_0}$ は C_0 の blow down であることがわかる．一方 $t\neq 0$ では $H+2F\,|_{\mathcal{M}_t}$ は very ample なので $\Phi\,|_{\mathcal{M}_t}$ は埋め込みになる．Φ による像を $\mathcal{X}$, $p_2\,|_{\mathcal{X}}$ を π とすると $\pi:\mathcal{X}\to\mathbb{C}$ は正規曲面の変形である．$C_0^2=-4$ なので $\mathcal{X}$ は一点で標準でない商特異点を持ち，$\mathcal{X}_t$ $(t\neq 0)$ は非特異点で $\Phi:\mathcal{M}\to\mathcal{X}$ が同時最小特異点解消になっている．

次に $\mathbb{Q}$-Gorenstein 性は変形によって保たれない例をみよう．

例 8.1.8　上の例より $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点 $(\mathcal{Z}_0,z)$ の変形 $(\mathcal{Z},z)\to(C,0)$ で $\mathcal{Z}_t$ $(t\neq 0)$ が $\mathbb{Q}$-Gorenstein でないものが作れる．実際 $(\mathcal{X},x)$ を 8.1.7 の変形の全空間とすると，補題 7.3.5 により平坦射 $\pi:\mathcal{Z}\to\mathbb{A}^1$ で $\mathcal{Z}_0\cong\mathcal{X}_0\times\mathbb{A}^1$, $\mathcal{Z}_t\cong\mathcal{X}$

なるものがある．ここで $\mathcal{Z}_0$ は $\mathbb{Q}$-Gorenstein であるが $\mathcal{Z}_t$ は $\mathbb{Q}$-Gorenstein ではない．

次の命題は，ある条件のもとでは $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点 (X,x) の変形全空間 $(\mathcal{X},x)$ が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点になることを示している．

命題 8.1.9 $\pi:(\mathcal{X},x)\to(C,0)$ を Cohen-Macaulay 正規特異点 (X,x) の 1-パラメータ変形，$\mathcal{X}$, X は余次元 3 の閉集合の外では Gorenstein 特異点のみをもつと仮定する．このとき $\omega_X^{[m]}$ が可逆ならば，$\omega_{\mathcal{X}}^{[m]}$ も可逆になる．

［証明］ $\mathcal{U}\subset\mathcal{X}, U=\mathcal{U}\cap\mathcal{X}_0\subset\mathcal{X}_0$ をそれぞれ $\mathrm{codim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}\setminus\mathcal{U})\geq 3, \mathrm{codim}_{\mathcal{X}_0}(\mathcal{X}_0\setminus U)\geq 3$ で $\mathcal{U}$, U 上で $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_0$ は Gorenstein とする．今 $\omega_{\mathcal{X}_0}^{[m]}$ が可逆すると，$\omega_{\mathcal{X}_0}^{[m]}|_U\cong\mathcal{O}_U$ として良い．さらに $\mathcal{X}_0\cong X$ は Cohen-Macaulay であるから，任意の素イデアル $\mathfrak{p}\subset\mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$ で $V(\mathfrak{p})\subset\mathcal{X}_0\setminus U$ なるものに対し $\operatorname{depth}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_0,\mathfrak{p}}=\dim(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_0})_{\mathfrak{p}}\geq 3$ となり次の補題より $\omega_{\mathcal{X}}^{[m]}|_{\mathcal{U}}\cong\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$, よって $\omega_{\mathcal{X}}^{[m]}$ は $\mathcal{X}$ 上可逆になる．

補題 8.1.10 (Lipman [Lip, Corollary]) $\pi:(\mathcal{X},x)\to(C,0)$ を (X,x) の 1-パラメータ変形とする．$\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_0=X$ のアフィン環をそれぞれ B, A とする．$\mathcal{U}$ を $\mathcal{X}$ の開集合，$U\subset\mathcal{U}$ を $\mathcal{X}_0$ の開集合で，$V(\mathfrak{p})\subset\mathcal{X}_0\setminus U$ なる任意の素イデアル $\mathfrak{p}\subset A$ に対し $\operatorname{depth}A_{\mathfrak{p}}\geq 3$ が成り立つものとする．$i:U\hookrightarrow\mathcal{U}$ を包含写像として $\mathcal{U}$ 上の局所的自由層 $\mathcal{F}$ が $i^*\mathcal{F}\cong\mathcal{O}_U^{\oplus n}$ をみたすとき $\mathcal{F}\cong\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus n}$ をみたす．特に自然な写像 $P_{ic}(\mathcal{U})\to P_{ic}(U)$ は単射である．

系 8.1.11 $\pi:(\mathcal{X},x)\to(C,0)$ を標準特異点 (X,x) の 1-パラメータ変形とすると，$(\mathcal{X},x)$ は $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点．

［証明］ $\mathcal{Z}\subset\mathcal{X}$ を Gorenstein でない $\mathcal{X}$ の特異点の集合とする．4.3.12 により $\mathcal{Z}\cap\mathcal{X}_0$ は $\mathcal{X}_0$ の Gorenstein でない特異点の集合．よって，系 7.3.2,(i) により $\mathrm{codim}_{\mathcal{X}_0}\mathcal{Z}\cap\mathcal{X}_0\geq 3$. したがって $\mathcal{X}$ を x の十分小さい近傍とすると

$\operatorname{codim}_{\mathcal{X}}\mathcal{Z} \geq 3$. これで 8.1.9 が適用できる.

次に特異点の有理性が変形によってどうなるか見よう.

定理 8.1.12　(Elkik [El1])　$\pi : (\mathcal{X}, x) \to (C, 0)$ を有理特異点 (X, x) の変形とすると十分小さく $C, \mathcal{X}$ をとり直せば $t \in C$ に対し $\mathcal{X}_t$ は有理特異点のみをもつ. また $(\mathcal{X}, x)$ は有理特異点である.

孤立有理特異点は Du Bois 特異点であった. では Du Bois 特異点は変形で保たれるのだろうか. 次に Du Bois 特異点の変形が必ずしも Du Bois 特異点でない例を示そう.

例 8.1.13　(石井 [I5])　2 次元正規特異点の変形 $\pi : (\mathcal{X}, x) \to (C, 0)$ で, 次をみたすものが存在する：

(i)　$(\mathcal{X}_0, x)$ の最小特異点解消 $f : Y \to \mathcal{X}_0$ は $E = f^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ が既約で非特異な曲線になり $E^2 < -2g(E) + 2$, $g(E) > 0$ をみたす.

(ii)　任意の $t \in C, t \neq 0$ に対し $\mathcal{X}_t$ はただ一つの特異点をもち, 最小特異点解消 $g : Y' \to \mathcal{X}_t$ は $E = g^{-1}(x)_{\mathrm{red}}$ が尖点を 1 つ持つ既約な有理曲線になる.

このとき (i) と 6.7.10 より $(\mathcal{X}_0, x)$ は Du Bois 特異点になる. しかし (ii) で g は良特異点解消ではないので 6.7.8 より $\mathcal{X}_t$ の特異点は Du Bois 特異点ではない.

次に 3 次元端末特異点の変形は端末特異点であることを示そう. これは Kollár と Shepherd-Barron [KSB] によって最初に示されたが J. Stevens [St] による証明が簡潔なのでこれを紹介しよう.

命題 8.1.14　(Stevens [St])　(X, x) を m-Gorenstein 特異点, $D \subset X$ を反標準因子 (i.e. $D \sim -K_X$) とする. (D, x) が有理特異点ならば (X, x) は標準特異点である.

[証明]　α を $\omega_X(D) \simeq \mathcal{O}_X$ の生成元とすると, $\alpha^{\otimes m}$ は $\omega_X^{[m]}(mD)$ の生成元

になる．h を可逆層 $\mathcal{O}_X(-mD)$ の点 x の近傍での生成元とすると $h\alpha^{\otimes m}$ は $\omega_X^{[m]}$ の生成元になる．$f:(\widetilde{X},\widetilde{D})\to(X,D)$ を埋め込み良特異点解消とする (i.e. $f:\widetilde{X}\to X$, $f|_{\widetilde{D}}:\widetilde{D}\to D$ が良特異点解消で (f の例外因子) $\cup\widetilde{D}$ が正規交差). 次の完全列の可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\widetilde{X},\omega_{\widetilde{X}}) & \longrightarrow & H^0(\widetilde{X},\omega_{\widetilde{X}}(\widetilde{D})) & \longrightarrow & H^0(\widetilde{D},\omega_{\widetilde{D}}) & \longrightarrow & H^1(\widetilde{X},\omega_{\widetilde{X}})=0 \\ & & \nu\big\downarrow & & \eta\big\downarrow & & \rho\big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X,\omega_X) & \longrightarrow & H^0(X,\omega_X(D)) & \longrightarrow & H^0(D,\omega_D) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

D が有理特異点しか持たないので ρ は同型であるので α が生成元であることより $f^*\alpha\in H^0(\widetilde{X},\omega_{\widetilde{X}}(\widetilde{D}))$, したがって $f^*(\alpha^{\otimes m})\in H^0(\widetilde{X},\omega_{\widetilde{X}}^m(m\widetilde{D}))$, よって $f^*(h\cdot\alpha^{\otimes m})\in H^0(\widetilde{X},\omega_{\widetilde{X}}^m)$. これより (X,x) は標準特異点になる．

系 8.1.15 8.1.14 の条件のもとで，さらに $X\setminus\{x\}$ が端末特異点しか持たないとき，(X,x) は端末特異点である．

［証明］ E を $f^{-1}(x)$ の既約因子とすると $f^*(\alpha^{\otimes m})$ は $\widetilde{D}$ 上でのみ極を持つので $\nu_E(f^*\alpha^{\otimes m})\geq 0$. また $\nu_E(h)>0$ より $\nu_E(f^*h\alpha^{\otimes m})>0$. E が $f^{-1}(x)$ に入らない既約例外因子のとき，$\dim f(E)\geq 1$ となっており，$X\setminus\{x\}$ が端末特異点であることより $\nu_E(f^*h\alpha^{\otimes m})>0$. よって (X,x) は端末特異点である．

定理 8.1.16 $\pi:(\mathcal{X},x)\to(C,0)$ を 3 次元端末特異点 (X,x) の 1-パラメータ変形とすると，$\mathcal{X}$, C を十分小さくとり直せば $\mathcal{X}_t$ は高々端末特異点しか持たない．また $(\mathcal{X},x)$ は端末特異点である．

［証明］ 前半を証明すれば後半の主張は 8.1.8 と同様に 7.3.5 を用いて従う．(X,x) は孤立特異点であるから $\mathcal{X}_t$ は高々孤立特異点しか持たない．また 8.1.11 より $\mathcal{X}_t$ は $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点である．一般の因子 $\mathcal{D}\in|-K_{\mathcal{X}}|$ をとれば $\mathcal{D}_0\in|-K_{\mathcal{X}_0}|$ は [Re2, 6.4.B] より高々有理特異点しか持たない．よって 8.1.12 より $\mathcal{D}_t\in|-K_{\mathcal{X}_t}|$ $(t\in C)$ も高々有理特異点しか持たない．8.1.15 より $\mathcal{X}_t$ は

高々端末特異点しか持たない.

次に標準特異点が変形によって保存されるかを考えよう.

定理 8.1.17　(川又 [KMM, 7-2-4])　$\pi : (\mathcal{X}, x) \to (C, 0)$ を標準特異点 (X, x) の 1-パラメータ変形で $\mathcal{X}$ は標準モデルを持つとする. $\mathcal{X}, C$ を十分小さくとり直せば, $\mathcal{X}_t$ は高々標準特異点しか持たない. また $(\mathcal{X}, x)$ は標準特異点である.

[証明]　$(\mathcal{X}, x)$ が標準特異点ならば, x の十分小さい近傍は, 高々標準特異点しかもたないので, 7.3.1 より $\mathcal{X}_t$ は高々標準特異点しかもたない. したがって $(\mathcal{X}, x)$ が標準特異点になることを証明すれば良い.

$f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ を $\mathcal{X}$ の標準モデル, $\mathcal{X}'_0$ を $\mathcal{X}_0$ の $\mathcal{Y}$ における狭義の逆像, $\mathcal{Y}_0 := f^*\mathcal{X}_0$, $\sigma : Z \to \mathcal{X}'_0 \subset \mathcal{Y}$ を正規化とする. r を $\mathcal{Y}$ 及び $\mathcal{X}_0$ の指数の公倍数とする. [Nak, Lemma 1] によりトレース写像:

$$\sigma_*\omega_Z^{[r]} \longrightarrow \omega_{\mathcal{Y}}^{[r]} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_0}$$

があるので

$$\omega_Z^{[r]} \longrightarrow \sigma^*(\omega_{\mathcal{Y}}^{[r]} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_0}) \tag{1}$$

を得る. 一方 $\nu := f \circ \sigma$ とすると $\mathcal{X}_0$ が標準特異点をもつことより,

$$\nu^*\omega_{\mathcal{X}_0}^{[r]} \longrightarrow \omega_Z^{[r]} \tag{2}$$

がある. (1), (2) をつなげて

$$\nu^*\omega_{\mathcal{X}_0}^{[r]} \longrightarrow \sigma^*(\omega_{\mathcal{Y}}^{[r]} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_0})$$

を得るので

$$\sigma^*K_{\mathcal{Y}} = \nu^*K_{\mathcal{X}_0} + (\text{有効な例外因子})$$

と書ける. $K_{\mathcal{Y}}$ は f-豊富であったので $\sigma^*K_{\mathcal{Y}}$ は ν-豊富. したがって 7.2.11 により ν は同型になり $K_{\mathcal{Y}}|_Z = K_{\mathcal{X}}|_{\mathcal{X}_0}$. 8.1.11 より $\mathcal{X}$ も $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点をもつので, $\mathbb{Q}$-カルティエ因子として,

$$K_{\mathcal{Y}} = f^* K_{\mathcal{X}} + \Delta$$

(Δ は例外因子からなる $\mathbb{Q}$-カルティエ因子) とかける．$K_{\mathcal{Y}}$ が f-豊富なので f が同型でなければ $\Delta < 0$ となり，台は例外因子全体となる．ここで

$$\begin{aligned} rK_{\mathcal{X}}\,|\,_{\mathcal{X}_0} &= rf^*K_{\mathcal{X}}\,|\,_Z \\ &> r(f^*K_{\mathcal{X}} + \Delta)|_Z = rK_{\mathcal{Y}}\,|\,_Z = rK_{\mathcal{X}}\,|\,_{\mathcal{X}_0} \end{aligned}$$

となり矛盾．よって f は同型すなわち $(\mathcal{X}, x)$ は標準特異点となる．

変形の全空間 $\mathcal{X}$ の標準モデルの存在を仮定しないで，標準特異点の変形がまた標準特異点になることが予想されているが，今までのところまだ証明はされていない．

8.1.18　対数的端末 (または対数的標準) 特異点 (X, x) の変形 $\pi : (\mathcal{X}, x) \to (C, 0)$ を考えると 8.1.7, 8.1.8 により $(\mathcal{X}, x)$, $\mathcal{X}_t$ は必ずしも $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点でないので，これらは対数的端末 (または対数的標準) 特異点ではない．そこで，変型の全空間 $\mathcal{X}$ に $\mathbb{Q}$-Gorenstein 性を仮定したらどうであろうか．次の定理により対数的端末特異点の変形はまた対数的端末特異点になる．また対数的標準特異点については，孤立特異点の場合に同様のことが示される (8.1.27).

定理 8.1.19　$\pi : (\mathcal{X}, x) \to (C, 0)$ を対数的端末特異点 (X, x) の 1-パラメータ変形とする．$(\mathcal{X}, x)$ が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点であると仮定する．すると $\mathcal{X}$, C を十分小さくとり直せば $\mathcal{X}_t$ $(t \in C)$ は高々対数的端末特異点しか持たない．また $(\mathcal{X}, x)$ は対数的端末特異点である．

［証明］ $\rho : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ を $(\mathcal{X}, x)$ の標準被覆とすると，$\pi' := \pi \circ \rho$ は $\mathcal{Y}_0 := \pi'^{-1}(0)$ の 1-パラメータ変形になり．$\mathcal{Y}_0$ は，分岐因子をもたないので 5.2.9 より指数 1 の対数的端末特異点，すなわち有理 Gorenstein 特異点．よって 8.1.6, 8.1.12 より $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}_t$ $(t \in C)$ は有理 Gorenstein 特異点しかもたない．したがってこれらの分岐因子をもたない有限射の像である $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_t$ は 5.2.9 より対数的端末特異点．

8.1.20　$\pi : (\mathcal{X}, x) \to (C, 0)$ を商特異点 (X, x) の 1-パラメータ変形とすると，例 8.1.8 では $(\mathcal{X}, x)$ が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点ではないので，商特異点にはならない．$\mathcal{X}_t$ $(t \in C)$ が商特異点になるか否かについては，2 次元の場合に次が証明されている．

定理 8.1.21　(Esnault-Viehweg [EV])　$\pi : (\mathcal{X}, x) \to (C, 0)$ を 2 次元商特異点 (X, x) の 1-パラメータ変形とすると，$\mathcal{X}$, C を十分小さくとり直せば，$\mathcal{X}_t$ $(t \in C)$ は高々商特異点しかもたない．

ここでまったく変形をもたない特異点について見ておこう．

定義 8.1.22　特異点 (X, x) が**硬直的** (rigid) であるとは (X, x) の任意の変形 $\pi : (\mathcal{X}, x) \to (C, 0)$ が自明な変形 $p_2 : X \times C \to C$ になる場合をいう．

定理 8.1.23　(Schlessinger [Sch2])　商特異点 (X, x) が $\operatorname{codim}_X X_{\mathrm{sing}} \geq 3$ をみたせば，硬直的である．

次に特異点の不変数が変形でどう変わるかを調べよう．まず埋め込み次元について見る．

定理 8.1.24　正規孤立特異点 (X, x) の埋め込み次元 $\operatorname{emb}(X, x)$ は任意の 1-パラメータの変形によって上半連続である．特に超曲面特異点の変型はまた超曲面特異点である．

[証明]　(X, x) の任意の 1-パラメータ変形 $\pi : \mathcal{X} \to C$ に対して，3.1.7,(vi) の証明より

$$\dim \mathfrak{m}_{\mathcal{X},y}/\mathfrak{m}_{\mathcal{X},y}^2 = \dim \Omega_{\mathcal{X},y}/\mathfrak{m}_{\mathcal{X},y}\Omega_{\mathcal{X},y}, \quad {}^\forall y \in \mathcal{X}.$$

中山の補題より $\Omega_{\mathcal{X},x}$ は $\dim \mathfrak{m}_{\mathcal{X},x}/\mathfrak{m}_{\mathcal{X},x}^2$ 個の元で生成されているので，$\mathcal{X}$, C を十分小さくとり直せば，任意の $y \in \mathcal{X}$ に対して，

$$\dim \mathfrak{m}_{\mathcal{X},x}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{X},x} \geq \dim \mathfrak{m}_{\mathcal{X},y}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{X},y}.$$
([Ha2], Ch.III, Ex.12.1)

一方任意の $t \in C$, $y \in \mathcal{X}_t$ に対して $\mathfrak{m}_{\mathcal{X}_t,y}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{X}_t,y} = \mathfrak{m}_{\mathcal{X},y}/(\mathfrak{m}^2_{\mathcal{X},y} + (\xi_t))$, ただし ξ_t は $t \in C$ における極大イデアルの生成元．したがって

$$\dim \mathfrak{m}_{\mathcal{X}_t,y}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{X}_t,y} = \dim \mathfrak{m}_{\mathcal{X},y}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{X},y} \text{ または } \dim \mathfrak{m}_{\mathcal{X},y}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{X},y} - 1.$$

ここで $C, \mathcal{X}$ を十分小さくとったとき $0 \neq t \in C$, $y \in \mathcal{X}_t$ に対して

$$\dim \mathfrak{m}_{\mathcal{X}_t,y}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{X}_t,y} = \dim \mathfrak{m}_{\mathcal{X},y}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{X},y} - 1$$

を示せば，$\dim \mathfrak{m}_{\mathcal{X}_0,x}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{X}_0,x} \geq \dim \mathfrak{m}_{\mathcal{X}_t,y}/\mathfrak{m}^2_{\mathcal{X}_t,y}$ が従い証明は終る．$\mathcal{I}$ を π の特異点集合 Σ の被約な定義イデアルとする．$\pi|_\Sigma : \Sigma \to C$ に Bertini の定理を適用すれば，C を十分小さくとれば $(\pi|_\Sigma)^{-1}(t)$ $(t \neq 0)$ は有限個の被約な点集合になる．したがって $y \in \Sigma \cap \mathcal{X}_t$ に対して

$$(\xi_t) + \mathcal{I}_y = \mathfrak{m}_{\mathcal{X},y}.$$

もし $\xi_t \in \mathfrak{m}^2_{\mathcal{X},y}$ なら

$$\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}/\mathfrak{m} = \mathcal{I}/\mathfrak{m}\mathcal{I} \twoheadrightarrow \mathcal{I}/\mathfrak{m}^2 \cap \mathcal{I} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} \otimes \mathcal{O}/\mathfrak{m}$$

より $\mathfrak{m}/\mathcal{I} \otimes \mathcal{O}/\mathfrak{m} = 0$. 中山の補題より $\mathcal{I} = \mathfrak{m}$ となって矛盾．よって $\xi_t \notin \mathfrak{m}^2_{\mathcal{X},y}$ でなければならない．また $y \in \mathcal{X}_t \setminus \Sigma$ なる点においては $\mathcal{X}_t$, $\mathcal{X}$ ともに非特異であるから $\xi_t \notin \mathfrak{m}^2_{\mathcal{X},y}$ となることは明らか．

次に幾何種数 p_g について見てみよう．

定理 8.1.25　(Elkik [El1])　n 次元正規孤立特異点 (X, x) に対して $\chi_i(X, x) = \sum_{j=0}^{n-i-1} (-1)^j \dim_{\mathbb{C}} R^{n-j-i} f_* \mathcal{O}_Y$ とおく．ただし $f : Y \to X$ は特異点解消．すると $\chi_i(X, x)$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ は任意の変形によって上半連続である．すなわち，$C, \mathcal{X}$ を十分小さくとれば次が成立する：

$$\chi_i(\mathcal{X}_0, x) \geq \sum_{y \in \mathcal{X}_t} \chi_i(\mathcal{X}_t, y), \quad {}^\forall t \in C.$$

とくに $\chi_1 + \chi_2$ を考えることにより幾何種数 p_g に対して次を得る：

$$p_g(\mathcal{X}, x) \geq \sum_{y \in \mathcal{X}_t} p_g(\mathcal{X}_t, y), \quad {}^\forall t \in C.$$

多重種数 δ_m についても同様の主張が示される．

定理 8.1.26　(石井 [I5])　正規孤立特異点 (X, x) の多重種数 $\delta_m(X, x)$ は任意の 1-パラメータ変形によって上半連続である．すなわち $C, \mathcal{X}$ を十分小さくとり直せば，次が成立する：

$$\delta_m(\mathcal{X}_0, x) \geq \sum_{y \in \mathcal{X}_t} \delta_m(\mathcal{X}_t, y), \quad {}^\forall t \in C.$$

8.1.25 の後半は，$m = 1$ とすることによりこの定理の系となる．

2 次元商特異点の変型がまた商特異点になること (8.1.21) はこの定理の系として証明することもできる．

この定理を用いて，全空間の $\mathbb{Q}$-Gorenstein 性を仮定すれば，任意次元の対数的標準特異点および対数的端末特異点が変形によって保存されることが示される．

命題 8.1.27　$\pi : (\mathcal{X}, x) \to (C, 0)$ を対数的標準 (または対数的端末) 孤立特異点の 1-パラメータ変形，$(\mathcal{X}, x)$ が $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点であると仮定する．すると $\mathcal{X}, C$ を十分小さくとり直せば $\mathcal{X}_t$ は高々対数的標準 (または対数的端末) 特異点しか持たない．

［証明］ δ_m に対して 8.1.26 の不等式が成立する近傍 C は m に依存するので C_m と表そう．$C^\dagger = \bigcap_{m \in N} C_m$ は C から高々可算個の点を除いたものなので，空集合 (または対数的端末) ではない．$t \in C^\dagger$ に対し 8.1.26 より

$$\delta_m(\mathcal{X}_t, y) \leq 1, \ (\text{または} = 0), \quad y \in \mathcal{X}_t$$

また $\mathcal{X}_t$ は $\mathbb{Q}$-Gorenstein 特異点であるから 5.3.12 より $\mathcal{X}_t$ $(t \in C^\dagger)$ は高々対数的標準 (または対数的端末) 特異点しか持たない．$f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ を特異点の良解

消で，$\mathcal{X}_0$ の狭義の逆像 Y への制限 $f|_Y : Y \to X$ も特異点の良解消になっているものとする．$C^* = C \setminus \{0\}$ 上の f の例外因子 E はすべて $\pi \circ f(E) = C^*$ となり，それらの和と $\mathcal{Y}_t$ $(t \in C^*)$ は正規交差しているとして良い．

$$K_{\mathcal{Y}} = f^* K_{\mathcal{X}} + \sum_{\pi \circ f(E_i) = C} \alpha_i E_i + \sum_{\pi \circ f(F_j) = \{0\}} \beta_j F_j$$

と表したとき，$t \in C^\dagger$ に対して

$$K_{\mathcal{Y}_t} = f^* K_{\mathcal{X}_t} + \sum \alpha_i E_i \,|\, \mathcal{Y}_t$$

で，$\mathcal{X}_t$ が対数的標準 (または対数的端末) であるから $\alpha_i \geq -1$ (または > -1) が得られる．よって任意の $t \in C^*$ に対して $\mathcal{X}_t$ は対数的標準 (または対数的端末) 特異点のみを持つ．

もうひとつの多重種数 γ_m については条件つきで上半連続性が示されている．

定理 8.1.28 (石井 [I9]) $\pi : (\mathcal{X}, x) \to (C, 0)$ を正規孤立特異点の 1-パラメータ変形とする．$(\mathcal{X}, x)$ が標準モデルをもてば多重種数 $\gamma_m(X, x)$ は上半連続である．すなわち $\mathcal{X}, C$ を十分小さくとり直せば，次が成立する：

$$\gamma_m(\mathcal{X}_0, x) \geq \sum_{y \in \mathcal{X}_t} \gamma_m(\mathcal{X}_t, y), \quad {}^\forall t \in C.$$

ここで等号が成立するとき π は同時標準モデルを持つ．

次に変形によって特異点の型がどう変わるかを見よう．

定理 8.1.29 (石井 [I9]) $\pi : (\overline{\mathcal{X}}, x) \to (C, 0)$ を $\kappa_\delta(\overline{X}, x) = 0$ なる 1-Gorenstein 特異点の 1-パラメータ変形で次をみたしているとする：

(i) $\pi : \overline{\mathcal{X}} \to C$ は射影的

(ii) 各 $\overline{\mathcal{X}}_t$ $(t \in C)$ は唯一つの特異点 $(\overline{\mathcal{X}}_t, x_t)$ を持ち $\kappa_\delta(\mathcal{X}_t, x_t) = 0$

このとき，C を十分小さくとり直せば，$(\overline{\mathcal{X}}_t, x_t)$ $t \in C^* = C \setminus \{0\}$ の型 $(0, j)$ は一定となり，$(\overline{\mathcal{X}}_0, x)$ の型を $(0, k)$ とすると，$k \leq j$ となる．

したがって特に $\pi:(\mathcal{X},x)\to(C,0)$ が2次元特異点の変形の場合，$(\mathcal{X},x)$ が単純楕円型のとき $(\mathcal{X}_t,x_t)$, $t\in C^*$ はまた単純楕円型になり，$(\mathcal{X}_0,x)$ がカスプ特異点のときは $(\mathcal{X}_t,x_t)$, $t\in C^*$ はカスプか単純楕円型になる．

8.2　半普遍変形

ひとつの特異点の変形をすべてとらえることができるのだろうか．この節では，孤立特異点の場合にそれが可能であることを紹介する．

定義 8.2.1　特異点 (X,x) の変形 $\pi:(\mathcal{X},x)\to(S,0)$ が**半普遍変形** (semi-universal deformation) であるとは，次の性質がみたされることをいう：

(1)　(X,x) の任意の変形 $\pi':(\mathcal{X}',x)\to(S',0)$ に対して射 $\rho:(S',0)\to(S,0)$ が存在して，$\mathcal{X}'\cong\mathcal{X}\times_S S'$ が成立している．

(2)　ρ は接空間の間の $\mathbb{C}$-線型写像： $d\rho_0:T_{S',0}:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S',0}}(\mathfrak{m}_{S',0}/\mathfrak{m}^2_{S',0},\mathbb{C})\to T_{S,0}:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{S,0}}(\mathfrak{m}_{S,0}/\mathfrak{m}^2_{S,0},\mathbb{C})$ を定めるが $d\rho_0$ は π' によって一意的に定まる．

このような S を $\mathrm{Def}(X,x)$ と表す．

この定義の (1) は変形 π が (X,x) のすべての変形を包含していることを示している．このような π は一意的ではないが，(2) はゆるい意味で一意性が成立することを要求している．

定理 8.2.2　(Tjurina [Tj], Grauert [Gr3], Donin [Do])　任意の孤立特異点 (X,x) に対して，半普遍変形は解析空間の圏で存在する．

定義 8.2.3　特異点 (X,x) の S 上の変形 $\pi:(\mathcal{X},x)\to(S,0)$ の S 上の同型による同値類の集合を $\mathrm{Def}_S(X,x)$ と表す．特に S が $\mathbb{C}$-代数 $\mathbb{C}[\varepsilon]$, $\varepsilon^2=0$ を座標環にもつアフィン多様体 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon]$ のとき $\mathrm{Def}_S(X,x)$ を $T^1_{X,x}$ と書き，この元を (X,x) の**無限小変形** (infinitesimal deformation) とよぶ．$T^1_{X,x}$ は $\mathbb{C}$-線型

空間になる.

命題 8.2.4 (X,x) が孤立特異点のとき，$T^1_{X,x}$ は $\mathrm{Def}(X,x)$ の 0 における接空間と同型になる.

［証明］ $\mathrm{Def}(X,x)$ の 0 における接空間 $T_{\mathrm{Def}(X,x),0}$ は [Mu,III, §4, Th3] により，射 $(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon],0) \to (\mathrm{Def}(X,x),0)$ の集合 $\mathrm{Hom}_0(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon], \mathrm{Def}(X,x))$ と一致することに注意する．$[\pi : \mathcal{Y} \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon]] \in T^1_{X,x}$ に対して半普遍変形の定義より $\rho : (\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon],0) \to (\mathrm{Def}(X,x),0)$ が存在して $d\rho : T_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon],0} \to T_{\mathrm{Def}(X,x),0}$ が一意的に決まる．$T_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon],0} \cong \mathbb{C}$ であるから $[\pi] \mapsto d\rho(1)$ により $\Phi : T^1_{X,x} \to T_{\mathrm{Def}(X,x),0}$ が決まる．逆に $\zeta \in T_{\mathrm{Def}(X,x),0} = \mathrm{Hom}_0(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon], \mathrm{Def}(X,x))$ に対して半普遍変形 $\mathcal{X} \to \mathrm{Def}(X,x)$ を $\zeta : \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon] \to \mathrm{Def}(X,x)$ によって引きもどすことにより $[\pi : \mathcal{X} \times_{\mathrm{Def}(X,x)} \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon] \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\varepsilon]] \in T^1_{X,x}$ が得られる．これは Φ の逆写像を与える.

命題 8.2.5 ([A3, 6.1]) 孤立特異点 (X,x) に対して

$$T^1_{X,x} \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{x,x}}(\Omega_{X,x}, \mathcal{O}_{X,x})$$

定理 8.2.6 (Tjurina [Tj]) 正規孤立特異点 (X,x) に対して $T^2_{X,x} := \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{X,x}, \mathcal{O}_{X,x}) = 0$ ならば，$\mathrm{Def}(X,x)$ は非特異になる.

例 8.2.7 $(X,0) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ を方程式 $f=0$ で定義される超曲面孤立特異点とする．このとき $T^2_{X,0}=0$ となり $\mathrm{Def}(X,0)$ は有限次元 $\mathbb{C}$-線型空間 $\mathbb{C}[x_0,\cdots,x_n]/\left(f, \frac{\partial f}{\partial x_0}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ となる.

実際，完全列：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\alpha} & \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}} \otimes \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \Omega_X & \longrightarrow & 0 \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \\ & & 1 & \longmapsto & df & & & & \end{array}$$

により次の完全列を得る：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,0}}(\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}\otimes\mathcal{O}_{X,0},\mathcal{O}_{X,0})\xrightarrow{\alpha^*}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X,0},\mathcal{O}_{X,0})\\&\xrightarrow{\delta}\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X,0}},(\Omega_{X,0},\mathcal{O}_{X,0})\longrightarrow\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X,0}}(\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}\otimes\mathcal{O}_{X,0},\mathcal{O}_{X,0})\\&\longrightarrow\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X,0}}(\mathcal{O}_{X,0},\mathcal{O}_{X,0})\longrightarrow\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{X,0}}(\Omega_{X,0},\mathcal{O}_{X,0})\\&\longrightarrow\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{X,0}}(\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}\otimes\mathcal{O}_{X,0},\mathcal{O}_{X,0}).\end{aligned}$$

ここで 2.3.7 より $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X,0}}(\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}\otimes\mathcal{O}_{X,0},\mathcal{O}_{X,0})=\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X,0}}(\mathcal{O}_{X,0},\mathcal{O}_{X,0})=0$ $(i\geq 1)$ であるから $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{X,0}}(\Omega_{X,0},\mathcal{O}_{X,0})=0$ で δ は全射．よって $T^1_{X,0}=\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X,0}}(\Omega_{X,0},\mathcal{O}_{X,0})=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,0}}(\mathcal{O}_{X,0},\mathcal{O}_{X,0})/\mathrm{Im}\,\alpha^*$．ここで $\mathrm{Hom}(\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}\otimes\mathcal{O}_{X,0},\mathcal{O}_{X,0})$ の基底 $\langle\varphi_0,\cdots,\varphi_n\rangle$ は $\varphi_i(dx_j)=\delta_{ij}\in\mathcal{O}_{X,0}$ となる．$\alpha^*(\varphi_i)(1)=\varphi_i\circ\alpha(1)=\varphi_i(df)=\frac{\partial f}{\partial x_i}$ であるから同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,0}}(\mathcal{O}_{X,0},\mathcal{O}_{X,0})\cong\mathcal{O}_{X,0}$, $\varphi\mapsto\varphi(1)$ により $\mathrm{Im}\,\alpha^*\cong\left(\frac{\partial f}{\partial x_0},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ となる．したがって $T^1_{X,0}\cong\mathbb{C}[x_0,\cdots,x_n]/\left(f,\frac{\partial f}{\partial x_0},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$．ここで $\mathbb{C}[x_0,\cdots,x_n]/\left(f,\frac{\partial f}{\partial x_0},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ の $\mathbb{C}$-線型空間としての基底を $p_i(x)$ $(i=1,\cdots,\ell)$ とすると，半普遍変形 $\pi:(\mathcal{X},x)\to(\mathrm{Def}(X,x),0)=(\mathbb{C}^\ell,0)$ は

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{X}=\left\{(x_0,\cdots,x_n,t_1,\cdots,t_\ell)\in\mathbb{C}^{n+1+\ell}\mid f+\sum_{i=1}^{\ell}t_ip_i=0\right\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^\ell\\ \uplus & & \uplus\\ (x_0,\cdots,x_n,t_1,\cdots,t_\ell) & \longmapsto & (t_1,\cdots,t_\ell)\end{array}$$

で与えられる (Kas-Schlessinger [KS])

例 8.2.8　(Pinkham [Pin, §8], [A3, §13])　Pinkham は，2 次元商特異点 $X_{n,1}$ $(n\geq 4)$ の T^1 および半普遍変形を計算した．それによると，$\dim T^1=2n-4$ であり，半普遍変形は $n\geq 5$ では基底空間は原点に 0 次元埋め込み成分をもっており被約構造は $n-1$ 次元非特異空間で，変形の全空間は $\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}^{n-1}$ の中で，行列：

$$\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1}\\ x_1-t_1 & x_2-t_2 & & \cdots\cdots & x_{n-1}-t_{n-1} & x_n\end{pmatrix}$$

の 2×2 小行列式 $=0$ で定義される．

$n=4$ では半普遍変形の基底空間は被約になり，非特異な 2 つの成分 $D_1 \cong \mathbb{C}^3$, $D_2 \cong \mathbb{C}^1$ をもつ．D_1 上の変形の全空間は $\mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^3$ の中で行列：

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 - t_1 & x_2 - t_2 & x_3 - t_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

の 2×2 小行列式 $= 0$ で定義される．D_2 上の変形の全空間は $\mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}$ の中で行列：

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 - t \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 - t & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

の 2×2 小行列式 $= 0$ で定義される．

一般に $T^i_{X,x}$, とくに $T^2_{X,x}$, を計算することは難しい．ここ 20 年間で，2 次元有理特異点，とくに商特異点，の場合に計算されたにどどまっている ([Ri2], [BeK], [BKR])

これからの発展を期待したい．

付　録　未解決問題

ほしい定理はあきらめた時に
証明できる

ここで本書の内容に関連する未解決の問題をいくつかあげておこう．

問 1　有理特異点は Du Bois 特異点か？

孤立有理特異点は Du Bois 特異点であった．また射影多様体上の有理特異点も Du Bois であった．またトーリック多様体上の特異点も Du Bois 特異点であると筆者は Steenbrink 氏からきいた (証明は見かけないが)．しかし一般の有理特異点については，まだわかっていない．

問 2　正規孤立特異点 (X,x) に対して，多重種数 $\delta_m(X,x)$, $\gamma_m(X,x)$ は m に関する有限個の多項式で表されるか？

$\mathbb{C}^*$ の作用をもつ 2 次元特異点の δ_m については [W1] において計算されており，例えば，$x^2+y^5+z^5=0$ で定義される超曲面特異点 $(X,0)\subset(\mathbb{C}^3,0)$ については，

$$\delta_m(X,0)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(m^2+3); & m\text{ が奇数のとき}\\[2ex]\dfrac{1}{4}(m^2+8); & m\text{ が偶数のとき}\end{cases}$$

となる．γ_m については，2 次元正規特異点に対し，有限個の多項式で表されることが Morales [Mor] によって示されている．δ_m については 2 次元 Gorenstein 特異点の場合に奥間 [Ok2] によって同様の結果が示された．一般にはどうであろうか．

問 3　$\gamma_m(X,x)$ は変形において上半連続か？

$\delta_m(X,x)$ は上半連続であった．$\gamma_m(X,x)$ は変形の全空間が標準モデルを持つ場合上半連続である．一般にはどうなのだろうか．この問題は次の問題とも密接に関連している．

問 4　標準特異点の変形は標準特異点であるか．

これも変形の全空間が標準モデルを持つ場合は成立していた．一般の場合は，まだ証明されていないが，これは高次元一般型完備多様体の Moduli 問題においても重要な問題である．

問 5　n 次元正規孤立特異点 (X,x) に対し

$$\delta(X,x) := \limsup_{m\to\infty} \frac{\delta_m(X,x)}{m^n}$$
$$\gamma(X,x) := \limsup_{m\to\infty} \frac{\gamma_m(X,x)}{m^n}$$

とおく．この δ, γ は変形において上半連続か．3 次元では標準モデルは常に存在するので，2 次元特異点の 1-パラメータ変形では γ_m も δ_m と同様に上半連続である．2 次元特異点については γ, δ は特異点解消の数値的条件だけで決まるので，基底空間に 0 の十分小さい近傍 Δ をとれば $\Delta \setminus \{0\}$ 上で γ も δ も一定になる．よって γ_m, δ_m の上半連続性を用いれば，γ, δ の上半連続は得られる．3 次元以上の特異点ではどうであろうか？

問 6　(Lê Dũng Tráng)　孤立超曲面特異点 $(X,0) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ の変形において，ミルナー数 $\mu(\mathcal{X}_t, x_t)$ (定義は [Mi] 参照) が一定ならば，γ, δ も一定となるか？

$\gamma(X,0) \neq 0$, $\delta(X,0) \neq 0$ なる場合が本質的である．実際 $\gamma(X,0) = 0$ とすると $(X,0)$ は有理特異点と同値だからどんな変形においても $\gamma = 0$ なる特異点しか登場しない．また $\delta(X,0) = 0$ とすると $(X,0)$ は高々対数的標準と同値であるからどんな変形においても $\delta = 0$ なる特異点しか登場しない．

問 7　「$^\forall m \leq m_0$ に対し，$\delta_m(X,x)=0$ ならば，$\delta_m(X,x)=0$ ($^\forall m \in \mathbb{N}$)」が成立するような m_0 が存在するか．また γ_m についても同様のことがいえるか？

これは完備曲面に対しての Enriques の判定法 (例えば [S, IV, §8, Th.13] 参照) の特異点版といえる．Enriques の判定法とは，多重種数 $P_m(S)=\dim_{\mathbb{C}}\Gamma(S,\omega_S^m)$ として $P_{12}(S)=0$ ならば $P_m(S)=0$ ($^\forall m \in \mathbb{N}$) というものであった．特異点の δ_m に関するこの主張は 2 次元特異点の場合に [Ok] によって最近示された．それによると，$m_0=6$ となる．この証明は 2 次元という条件を縦横に使っているので高次元でもこの主張が成立するかどうかはわからない．

問 8　$0<\kappa_\delta(X,x)<n$ をみたす n 次元正規孤立特異点の (おもしろい) 構成法を求む．

$n-1$ 次元の非特異完備多様体上の錐により任意の $\kappa_\delta=-\infty,0,1,\cdots,n-2,n$ を持つ特異点が構成できた．$0<\kappa_\delta(X,x)<n$ についてはこれ以外の構成法は知られていない．何かおもしろい方法でこれらのものがたくさん構成できないものだろうか？

参考文献

[Ab] Abhyankar, S.S.: Local Analytic Geometry, Academic Press, New York-London, 1964

[A1] Artin, M.: Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces, Amer. J. Math. 84, 1962, 485-496

[A2] Artin, M.: On isolated rational singularities of surfaces. Amer. J. Math. 88, 1966, 129-136

[A3] Artin, M.: Lecture on deformations of singularites, Tata Institute of Fund. Research Bombay 1976, Springer-Verlag

[A4] Artin, M.: On the solutions of analytic equations, Inventiones Math. 5 , 1968, 277-291

[A5] Artin, M.: Algebraic approximation of Structures over complete local rings, Publ. Math. IHES No36, 1969, 23-58

[A6] Artin, M.: Algebraization of formal moduli I, Collection of Mathematical papers in Honor of K.Kodaira. University of Tokyo Press, 1970, 21-71

[A7] Artin, M.: Algebraization of formal moduli II, Annals of Math. vol. 91, No 1, January 1970, 88-135

[AK] Altman, K. & Kleiman, S.: Introduction to Grothendieck duality theory, Lecture Notes in Math. 146, Springer-Verlag 1970

[AM] Atiyah, M.F. & Macdonald I.G.: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Series in Mathematics, 1969

[AHV] Aroca, J.M. & Hironaka, H. & Vicente, J.L.: Desingularization Theorems. Memorias de Mathematica del Instituto "Jorge Juan" 30 Madrid, 1977

[BeC] Behnke, K. & Christophersen, J.A.: Hypersurface sections and obstructions. Rational surface singularities(With appendix by J.Stevens) Compositio Math. 77, 1991,233-258

[BeK] Behnke, K. & Knörrer, H.: On infinitesimal deformations of rational surface singularities, Compositio Math. 61, 1987, 103-127

[BKR] Behnke, K. & Kahn, C. & Riemenschneider, O.: Infinitesimal deformations of quotient surface singularities, In "Singularities" Warsaw 1985, Banach Center Publ. 20, 1988, 31-66

[B] Borelli, M.: Divisorial varieties, Pacific J. Math. 13, 1963, 375-388

[Br] Brieskorn, E.: Rationale Singularitäten komplexer Flächen, Invent. math. 4, 1968, 336-358

[Ch] Chevalley, C.: Invariants of finite groups generated by reflections, Amer. J.

Math. 77, 1955, 778-782
[CL] Call, F. & Lyubeznik, G.: A simple proof of Grothendieck's theorem on the parafactoriality of local rings, Contemporary Math. 159, 1994, 15-18
[De] Deligne, P.: Theorie de Hodge II, III. Publ. Math. IHES 40, 1971, 5-58, and 44, 1975, 50-77
[DB] Du Bois, P.: Complex de de Rham fitré d'une variété singulière, Bull. Soc. Math. France, 118, 1981, 75-114
[Do] Donin, I.F.: Complete families of deformations of germs of complex spaces, Math. USSR Sbornik 18, 1972, 397-406
[Du] Durfee, A.: Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points, L'Enseignement XXV 1-2, 1979, 131-163
[EGA II, III] Grothendieck, A. & Dieudonné, J.: Eléments de Géometrie Algébrique II, III, Publ. Math. IHES 8, 1961, Ibid. 11, 1961, and 17, 1963
[El1] Elkik, R.: Singularités rationelles et déformations, Invent. Math. 47, 1978, 139-147
[El2] Elkik, R.: Rationalité des singularités canoniques, Invent. Math. 64, 1981, 1-6
[EV] Esnault, H. & Viehweg, E.: Two dimensional quotient singularities deform to quotient singularites, Math. Ann. 271, 1985, 439-449
[Fis] Fischer, G.: Complex Analytic Geometry, Lecture Notes in Math. 538, Springer-Verlag, 1976
[F] Fletcher, A.R.: Plurigenera of 3-folds and weighted hypersurfaces. Thesis submitted to the Unversity of Warwick for the degree of Ph.D (1988)
[Fo] Fossum, R.: The Divisor Class Groupes of Krull Domain, Ergebnisse der Math, u. Ihrer Grenz. 74, Springer-Verlag, 1973
[Fu] Fujita, T.: A relative version of Kawamata-Viehweg's vanishing theorem, 代数幾何学シンポジウム記録, 広島教育会館
[GIT] Mumford, D. & Forgaty, J. & Kirwan, F.: Geometric Invariant Theory, Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenz. 34, Springer-Verlag, 1994
[Gr] Grothendieck, A.: Local cohomology, Lecture Notes in Math. 41, Springer-Verlag, 1967
[Gr1] Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume kkomplexer Sturkturen, Inst. Publ. Math. IHES. 5, 1960
[Gr2] Grauert, H.: Über Modifikationen und exzeptionelle analytischen Mengen, Math. Ann. 146, 1962, 331-368
[Gr3] Grauert, H.: Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischen Mengen, Invent. Math. 15, 1972, 171-198
[GR] Grauert, H. & Riemenschneider, O.: Verschwindungssatze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen, Invent. Math. 11, 1970, 263-292
[Ha1] Hartshorne, R.: Residues and Duality, Lecture Notes in Math. 20, Springer-Verlag, 1966
[Ha2] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, 1977
[H] Hironaka, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, II, Annals of Math. 79, 1964, 109-326
[HR] Hironaka, H. & Rossi, H.: On the equivalence of embeddings of exceptional complex spaces, Math. Ann. 156, 1964, 313-368
[HYW] 樋口禎一・吉永悦男・渡辺公夫：多変数複素解析入門, 数学ライブラリー 51, 森北出版, 1980
[Ho] 堀田良之：代数入門—群と加群—, 数学シリーズ, 裳華房, 1987
[I1] Ishii, S.: On the pluri-genera and mixed Hodge structures of isolated singulari-

ties, Proc. Japan Acad. 59, 1983, 355-357

[I2] Ishii, S.:On isolated Gorenstein singularities, Math. Ann. 270, 1985, 541-554

[I3] Ishii, S.: Du Bois singularities on a normal surface, Advanced Study in Pure Math. 8. 1986, Complex analytic singularities, 153-163

[I4] Ishii, S.: Isolated Q-Gorenstein singularities of dimension three, Advanced Study in Pure Math. 8. 1986, Complex analytic singularities, 165-198

[I5] Ishii, S.: Small deformations of normal singularities, Math. Ann. 275, 1986, 139-148

[I6] Ishii, S.: Two dimensional singularities with bounded pluri-genera δ_m are Q-Gorenstein singularities, Proceedings of Symposium of Singularities Iowa 1986, Contemporary Math. 90, 1989, 135-145

[I7] Ishii, S.: The asymptotic behavior of pluri-genera for a normal isolated singularity, Math. Ann. 286, 1990, 803-812

[I8] Ishii, S.: Quasi-Gorenstein Fano 3-folds with the isolated non-rational loci, Compositio Math. 77, 1991, 335-341

[I9] Ishii, S.: Simultaneous canonical modifications of deformations of isolated singularities. In: Algebraic Geometry and Analytic Geometry, Proceeding of the Satellite Conference of ICM 90, Springer-Verlag, 1991, 81-100

[I10] Ishii, S.: The canonical modifications by weighted blowups, J. Alg. Geom. 5, 1996, 783-799

[I11] Ishii, S.: Minimal, canonical and log-canonical models of hypersurface singularities, Contemporary Math. 207, 1997, 63-77

[I12] Ishii, S.: Minimal model theorem for toric divisors, preprint, 1997

[IW] Ishii, S & Watanabe, K.: A geometric characterization of a simple K3-singularity, Tohoku Math. J. 44,1992, 19-24

[KMM] Kawamata, Y., Matsuda, K. & Matsuki, K.: Introduction to the minimal model problem. Algebraic Geometry in Sendai 1985 edited by Oda, Advanced Studies in Pure Math. 10, 283-360 Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1987

[Kl] Klein, F.: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleihungen vom fünften Grade, Teubner, Leibzig 1884

[Klm] Kleiman, S.: Toward a numerical theory of ampleness, Ann. Math. 84, 1966, 293-344

[Kn] Knöller, F.W.: 2-dimensionale Singularitäten und Differentialformen. Math. Ann. 206, 1973, 205-213

[Kol] Kollár, J.: Shafarevich Maps and Automorphic Forms, Princeton UP. 1995

[KS] Kas, A.& Schlessinger, M.: On the versal deformation of a complex space with an isolated singularity, Math. Ann. 196, 1972, 23-29.

[KSB] Kollár, J. & Shepherd-Barron, N.: Threefolds and deformations of surface singularities, Invent. Math. 91, 1988, 299-338

[La1] Laufer, H.B.: Taut two dimensional singularities, Math. Ann. 205, 1973, 131-164

[La2] Laufer, H.B.: On minimally elliptic singularities Amer. J. Math. 99, 1977, 1257-1295

[Li] Lichtenbaum, S.: Curves over discrete valuation rings, Doctoral dissertation, Harverd, 1964

[Lip] Lipman, J.: Rings with discrete divisor class group: Theorem of Danilov-Samuel, Amer. J. Math. 101, 1979, 203-211

[Ma1] Matsumura, H.: Commutative algebra, W.A.Benjamin Co., New York, 1970

[Ma2] Matsumura, H.: Commutative Ring Theory. Cambridge studies in advanced mathematics 8. Cambridge University Press 1986

[Mi] Milnor, J.: Singular Points of Complex Hypersurfaces, Ann. Math. Studies 61, Princeton UP. 1974

[Mor] Morales, M.: Calcul de quelques invariants des singularités de surface normale, Comptes rendes de séminaire tenu aux Plans- sur-Bex, 1982, 191-203

[Mo1] Mori, S.: Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds. J. Amer. Math. Soc. 1, 1988, 117-253

[Mo2] Mori, S.: On 3-dimensional terminal singularities, Nagoya Math. J. 98, 1985, 43-66

[MK] Morrow, J. & Kodaira, K.: Complex Manifolds, Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1971

[Mu] Mumford, D.: Red Book of Varieties and Schemes. Lecture Note in Math. 1358, Springer-Verlag, 1988

[Mur] Bloch, A. (倉骨彰訳): マーフィーの法則, アスキー出版 1993

[Nak] Nakayama, N.: Invariance of the plurigenera of algebraic varieties under minimal model conjecture. Toplogy 25, No.2, 1986, 237-251

[Nar] Narashimham, R.: Introduction to The Theory of Analytic spaces. Lecture Note Math. 25. Springer-Verlag, 1966

[NMM] 永田雅宜・宮西正宜・丸山正樹：抽象代数幾何学, 共立講座現代の数学 10, 共立出版, 1972

[Od1] Oda, T.: Lectures on torus embeddings and applications, (Based on joint work with Katsuya Miyake), Tata Inst. of Fund. Research **58**, Springer-Verlag, 1978

[Od2] Oda, T.: Convex bodies and algebraic geometry-An introduction to the theory of toric varieties, Ergeb. Math. Grenzgeb. 15, 1988

[Od3] 小田忠雄：凸体と代数幾何学, 紀伊国屋数学叢書 24, 紀伊国屋書店, 1985

[Ok] Okuma, T.: The pluri-genera of surface singularities, to appear in Tohoku Math. J.

[Ok2] Okuma, T.: The plurigenera of Gorenstein surface singularities, preprint, 1997

[Pin] Pinkham, H.C.: Deformation of Algebraic Varietiees with $\mathbf{G_m}$ Action. astérisque 20, 1974

[Re1] Reid, M.: Canonical 3-folds. Proc. Algebraic Geometry Anger 1979. Sijthoff and Nordhoff 273-310

[Re2] Reid, M.: Young person's guide to canonical singularities, Proceeding of Symposia in Pure Math. 46, 1987, 345-414

[Ri1] Riemenschneider, O.: Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen) Math. Ann. 209, 1974, 211-248

[Ri2] Riemenschneider, O.: Dihedral singularities: Invariants, equations and infinitesimal deformations, Bull. Amer. Math. Soc. 82, 1976, 725-747

[S] Šafarevič, I.R.: Algebraic Surfaces, Proceeding of the Steklov Institute of Math. 75 AMS , 1967

[Sa] Saito, K.: Einfach elliptische Singularitäten. Univ. Math. 23, 1974, 289-325

[Sch1] Schlessinger, M.: Functors of Artin rings, Trans. Amer. Math. soc. 130, 1968, 208-222

[Sch2] Schlessinger, M.: Rigidity of quotient singularities, Invent. Math. 14, 1971, 17-26

[Se1] Serre, J-P.: Faiseaux algébriques cohérents, Ann. Math.61, 1955, 197-278

[Se2] Serre, J-P.: Sur la cohomologie des variétés algebriques, J. de Math. Pures et Appl. 36, 1957, 1-16

[Se3] Serre, J-P.: Geometrie Algebrique et Geometrie Analytique, Ann. Inst. Fourier 6, 1956, 1-42

[SGA] Grothendieck, A.: Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de

Lefschetz locaux et globaux (SGA2), North-Holland, Amsterdam, 1968

[Sn] Snapper, E.: Polynomials associated with divisors, J. Math. and Mech. 9, 1960, 123-129

[Sp] Springer, T.A.: Invariant Theory, Lecture Notes in Math. 585, Springer-Verlag, 1977

[Spa] Spanier, E.: Algebraic Toplogy, McGraw-Hill Book Co. 1966

[St] Stevens, J.: On canonical singulrities as total spaces of deformations, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 58, 1988, 275-283

[Tj] Tjurina, G.N.: Locally semi-universal flat deformations of isolated singularities of complex spaces, Math. USSR. Izv. 3, 1969, 976-1000

[Ts1] Tsuchihashi, H.: Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. 35, 1983, 607-639

[Ts2] Tsuchihashi, H.: Three dimensional cusp singularities, Advanced Studies in Pure Math. 8, 1986 Complex Analytic Singularities, 649-679

[TW] Tomari, M.& Watanabe, K.: On L^2-plurigenera of not-log-canonical Gorenstein isolated singularities. Amer. Math. Soc. 109, 1990, 931-935

[V] Varchenco, A.N.: Zeta-function of monodromy and Newton's diagram, Invent. Math. 37, 253-262

[W1] Watanabe, K.: On plurigenera of normal isolated singularities I, Math. Ann. 250, 1980, 65-94

[W2] Watanabe, K.: On plurigenera of normal isolated singularities II, Advanced Studies in Pure Math. 8, Complex analytic Singularities, 1986, 671-685

[WH] Watanabe, K. & Higuchi, T.: On certain class of purely elliptic singularities in dimension > 2, Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. Sect. I, 30, 1983, 31-35

[WKi] Watanabe, K-i.: Certain invariant subrings are Gorenstein, I, II, Osaka J. Math. 11, 1974, 1-8, 379-388

[Wh] Whiteney, H.: Differential manifolds, Ann. Math.37, 1936, 645-680

[Y] Yonemura, T.: Hypersurface simple K3 singularities, Tohoku Math. J. Second Series, 42, 1990, 351-380

[Z] Zariski, O.: The reduction of the singularities of an algebraic surface, Ann. Math. 40, 1939, 639-689

[ZS] Zariski, O. & Samuel, P.: Commutative Algebra I, II, Princeton NJ.; Van Nostrand 1958, 1960

索　引

著　者

石井　志保子（いしい　しほこ）
東京都立大学大学院博士課程修了
理学博士
東京工業大学理学部数学科助教授

シュプリンガー現代数学シリーズ編者

伊藤　雄二（いとう　ゆうじ）
慶応義塾大学理工学部
数理科学科教授

特異点入門　定価（本体4,700円＋税）

発　行　1997年10月24日
著　者　石井　志保子
発行者　平野　皓正
発行所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
〒113　東京都文京区本郷3丁目3番13号
TEL（03）3812-0757（営業直通）
印刷所　三松堂印刷株式会社

ISBN 4-431-70730-1　C3041